6. Диференцируемост и диференциал на функция

6.1. Диференцируемост на функция

Определение. *Функцията $f(x)$ се нарича **диференцируема в точката** x_0, ако нейното нарастване $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в тази точка може да се представи във вида*

$$\Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{6.1}$$

където A е число, независещо от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ е безкрайно малка функция на Δx при $\Delta x \to 0$, т. е. $\lim_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Теорема 6.1. *Функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 тогава и само тогава, когато тя има крайна производна в тази точка.*

При това константата A в представянето (6.1) е равна на производната на функцията: $A = f'(x_0)$.

Доказателство. В сила е следната верига от равносилности: функцията $f(x)$ е диференцируема в точката $x_0 \iff \Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \iff \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \neq 0 \iff$ съществува крайната граница $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A \iff$ съществува крайната производна $f'(x_0) = A$. Първата равносилност просто изразява определението за диференцируемост на функция, втората се получава чрез разделянето на двете страни на представянето (6.1) на Δx. Третата равносилност изразява теорема 2.2 от въпроса за граница на функция (ролята на f сега се играе от $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, на $x \to x_0$ – от $\Delta x \to 0$, и на ℓ – от A). Последната равносилност просто изразява определението за производна на функция. $\square$

Теорема 6.1 показва, че за функция на една независима променлива понятието диференцируемост се отъждествява със съществуването на крайна производна. Ето защо от теорема 5.1 веднага заключаваме, че *диференцируемостта на една функция $f(x)$ в точката x_0 може да се отъждестви със съществуването на допирателна, която не е перпендикулярна на абсцисната ос Ox, към графиката на функцията в точката $M_0(x_0, f(x_0))$.* Да напомним, че в случая, когато функцията има безкрайна производна в точката x_0, графиката ѝ има също допирателна в точката $M_0(x_0, f(x_0))$, но тя е вертикална (перпендикулярна на оста Ox). Ако обаче една функция $f(x)$ няма производна в точката x_0 (нито крайна, нито безкрайна), то графиката ѝ няма допирателна в точката $M_0(x_0, f(x_0))$, която в този случай представлява "ъглова точка" от графиката. Да разгледаме примери за такива функции.

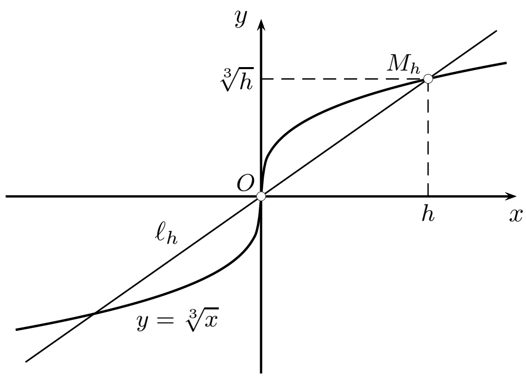
Пример 1 (Функции, имащи безкрайна производна). Да разгледаме първо функцията $f(x) = \sqrt[3]{x}$, чиято графика е показана на фиг. 6.1. Вижда се, че когато точката M_h се приближава отдясно към точката $O(0,0)$ (т. е. при $h > 0$), секущата OM_h се приближава към оста Oy. Същото става и когато точката M_h се приближава отляво към точката O (т. е. при $h < 0$). Това показва, че графиката на функцията има вертикална допирателна в точката O и тя е оста Oy.

За ъгловия коефициент m_h на секущите, минаващи през точката $O(0,0)$, имаме

$$\begin{aligned} m_h &= \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} \\ &= \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = h^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{h})^2}, \end{aligned}$$

откъдето получаваме

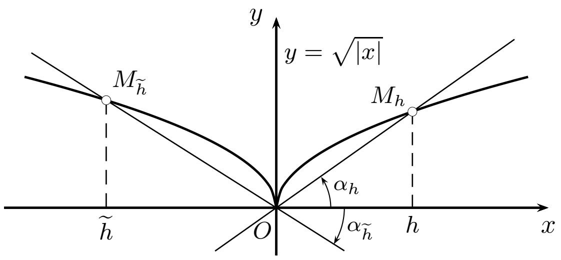
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{h})^2} = +\infty.$$



Фиг. 6.1

Следователно функцията $f(x) = \sqrt[3]{x}$ има безкрайна производна в точката $x = 0$, което строго доказва, че правата $x = 0$ (оста Oy) е наистина вертикална допирателна към графиката на функцията в точката $O(0,0)$.

Да разгледаме сега функцията $f(x) = \sqrt{|x|}$. Тъй като $f(-x) = f(x)$, то тази функция е четна и, следователно графиката ѝ е симетрична относно ординатната ос Oy. Ето защо графиката на функцията $f(x)$ в интервала $(-\infty, 0]$ се получава чрез симетрия относно оста Oy на графиката ѝ в интервала $[0, \infty)$, в който е добре позната: $f(x) = \sqrt{x}$ при $x \in [0, \infty)$, вж. фиг. 6.2. Вижда се, че когато точката M_h се приближава отдясно към точката $O(0,0)$ (т. е. при $h > 0$) правата OM_h се приближава към оста Oy, като $\alpha_h \to \dfrac{\pi}{2}$ при $h \to 0$ и, следователно $m_h = \operatorname{tg}\alpha_h \to +\infty$ при $h \to 0$ щом $h > 0$. Аналогично, когато точката $M_{\widetilde{h}}$ се приближава отляво към точката $O(0,0)$ (т. е. при $\widetilde{h} < 0$) секущата $OM_{\widetilde{h}}$ се приближава също към оста Oy, но сега $\alpha_{\widetilde{h}} \to -\dfrac{\pi}{2}$ при $\widetilde{h} \to 0$ и, следователно $m_h = \operatorname{tg}\alpha_h \to -\infty$ при $h \to 0$ щом $h < 0$. Това показва, че оста Oy е допирателна към графиката на функцията в точката $O(0,0)$.



Фиг. 6.2

За ъгловия коефициент m_h на секущите, минаващи през точката $O(0,0)$, формално получаваме

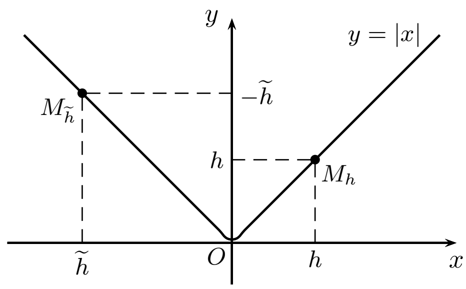
$$m_h = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{|0+h|} - \sqrt{|0|}}{h}$$
$$= \frac{\sqrt{|h|}}{h} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{-h}}{h} = -\dfrac{1}{\sqrt{-h}}, & \text{ако } h < 0, \\ \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}, & \text{ако } h > 0, \end{cases}$$

откъдето намираме едностранните граници

$$\lim_{h \to 0-0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -\lim_{h \to 0-0} \frac{1}{\sqrt{-h}} = -\infty,$$
$$\lim_{h \to 0+0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty,$$

т. е. те са безкрайни с различен знак. В такъв случай понякога се казва, че функцията има също безкрайна производна, която се означава със символа ∞ без знак.

Пример 2 (Функция, нямаща производна). Да разгледаме функцията $f(x) = |x|$, чиято графика е показана на фиг. 6.3. Вижда се, че когато точката M_h се приближава отдясно към точката $O(0,0)$ (т. е. при $h > 0$) правата OM_h остава същата – ъглополовящата на първи и трети квадрант, която сключва ъгъл $\alpha_h = \dfrac{\pi}{4}$ с положителната посока на абсцисната ос Ox.



Фиг. 6.3

Аналогично, когато точката $M_{\widetilde{h}}$ се приближава отляво към точката $O(0,0)$ (т. е. при $\widetilde{h} < 0$) правата $OM_{\widetilde{h}}$ остава същата – ъглополовящата на втори и четвърти квадрант, която сключва ъгъл $\alpha_{\widetilde{h}} = -\dfrac{\pi}{4}$ с положителната посока на оста Ox. Следователно секущите към графиката на функцията, минаващи през точката O, нямат едно и също гранично положение, което означава, че *графиката на функцията няма допирателна в точката O*.

За ъгловия коефициент m_h на секущите, минаващи през точката $O(0,0)$, формално получаваме

$$m_h = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{-h}{h} = -1, & \text{ако } h < 0, \\ \dfrac{h}{h} = 1, & \text{ако } h > 0. \end{cases}$$

Едностранните граници

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0-0} m_h &= \lim_{h \to 0-0} (-1) = -1, \\ \lim_{h \to 0+0} m_h &= \lim_{h \to 0+0} 1 = 1 \end{aligned} \tag{6.2}$$

не са равни, което означава, че не съществува границата на m_h при $h \to 0$ или, еквивалентно, че функцията $f(x)$ няма производна $f'(x)$ в точката $x = 0$. Оттук следва, че графиката на функцията няма допирателна, неперпендикулярна на оста Ox, в точката O. В тази точка няма също и вертикална допирателна, тъй като едностранните граници (6.2) не са безкрайни. Точката O представлява "ъглова точка" от графиката на функцията.

Определение *Функцията $f(x)$ се нарича* ***диференцируема в интервала*** (a, b)*, ако тя е диференцируема във всяка точка x от този интервал. Тогава производната ѝ $f'(x)$ представлява функция на x, дефинирана в интервала (a, b), и се нарича* ***производна на*** $f(x)$ ***в този интервал.***

6.2. Диференцируемост и непрекъснатост на функция

Теорема 6.2. *Ако една функция $f(x)$ е диференцируема в точката x_0, то тя е непрекъсната в тази точка.*

Доказателство. Да напомним, че една функция $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, ако $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ или, еквивалентно, ако

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0\,.$$

Но това е наистина изпълнено, тъй като

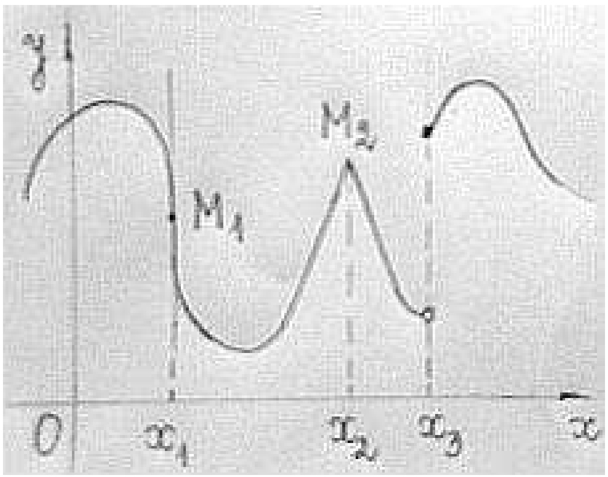
$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\,.\,0 = 0,$$

където приложихме определението за производна, щом функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0. С това теоремата е доказана. Тя може да се докаже и чрез граничен преход в равенството (6.1) при $x \to x_0$, т.е. при $\Delta x = x - x_0 \to 0$. Аргументирайте този начин! $\square$

От теорема 6.2 веднага можем да направим следния извод.

Следствие. *Ако функцията $f(x)$ е прекъсната в точката x_0, то тя не е диференцируема в тази точка.*

Важно е да отбележим, че обратното твърдение на Теорема 6.2 *не е вярно*, т. е., от това, че една функция е непрекъсната в една точка *не следва*, че тя е диференцируема в тази точка. Например, функцията $f(x) = |x|$ е непрекъсната, но не е диференцируема в точката $x_0 = 0$. В този смисъл непрекъснатите функции са "повече" от диференцируемите функции на този свят.



Фиг. 6.4. В точките x_1, x_2 и x_3 функцията $y = f(x)$, чиято графика е дадена на фигурата, не е диференцируема, тъй като в точката $M_1(x_1, f(x_1))$ графиката на f има вертикална допирателна, в точката $M_2(x_2, f(x_2))$ няма допирателна, а в точката x_3 функцията е прекъсната.

Възможните случаи, в които една функция не е диференцируема, са резюмирани на фиг. 6.4.

6.3. Диференциал на функция

Според формула (6.1) нарастването на една диференцируема функция $f(x)$ се представя като сума на две събираеми: първото събираемо $A\Delta x$ е линейна функция на Δx, а за второто събираемо имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0. \qquad (6.3)$$

Ако $\gamma(x)$ и $\beta(x)$ са две безкрайно малки функции при $x \to x_0$ и за тях е изпълнено $\lim_{x\to x_0} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = 0$, се казва, че $\gamma(x)$ е ***безкрайно малка от по-висок ред*** от $\beta(x)$ при $x \to x_0$. (Очевидно тогава стойностите на $|\gamma(x)|$ са много по-малки от тези на $|\beta(x)|$ за стойности на x, близки до x_0.) Тогава означаваме $\gamma(x) = o(\beta(x))$ (Символът o се чете "o-малко".)

Според (6.3) имаме $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Следователно представянето (6.1) може да се запише във вида

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0. \qquad (6.4)$$

Определение *Линейната част $A\Delta x$ на нарастването Δf в представянето (6.4) се нарича* ***диференциал на функцията*** *$f(x)$* ***в точката*** *x_0 и се означава с $\mathrm{d}f(x_0)$, т.е.*

$$\mathrm{d}f(x_0) = A\Delta x\,. \qquad (6.5)$$

Тъй като според теорема 6.1 $A = f'(x_0)$, то

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x\,. \tag{6.6}$$

Нека сега, само за момент, да разгледаме частния случай, когато $f(x) = x$. Тъй като тогава $f'(x) = (x)' = 1$ за всяко x, то от (6.6) получаваме равенството

$$\mathrm{d}x = \Delta x\,. \tag{6.7}$$

което се приема като определение за *диференциал на независимата променлива x.* Тогава формулата (6.6) се записва така:

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,\mathrm{d}x\,, \tag{6.8}$$

откъдето следва, че

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}\,. \tag{6.9}$$

Това представяне на производната е въведено от немския математик Г. В. Лайбниц (1646-1716), който разглежда диференциалите $\mathrm{d}f$ и $\mathrm{d}x$ като *"безкрайно малки нараствания"* на функцията $f(x)$ и нейния аргумент, т. е., като въображаеми ненулеви величини (при $f'(x_0) \neq 0$), чиито абсолютни стойности са по-малки от кое да е положително число. Очевидно тогава представянето (6.9) е в пълно съгласие с познатото ни определение за производна като границата

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\,,$$

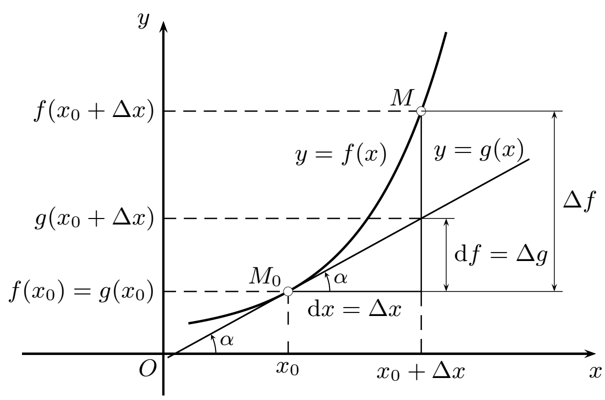
щом

$$\Delta f \approx \mathrm{d}f \tag{6.10}$$

и $\Delta x = \mathrm{d}x$ за малки по абсолютна стойност нараствания Δx. Тази интерпретация на диференциалите $\mathrm{d}f$ и $\mathrm{d}x$ се оказва изключително удобна при моделирането на редица природни явления и процеси. В съгласие с представянето (6.9) за означението на производната на една функция $y = f(x)$ се използва също означението

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\,, \quad \text{или още} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,.$$

Приближеното равенство (6.10) се получава при пренебрегването на второто събираемо $o(\Delta x)$ в (6.4), което е разумно да се направи за малки стойности на $|\Delta x|$.



Фиг. 6.5

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) и е диференцируема в точката x_0 от този интервал. Тогава графиката на функцията има допирателна ℓ в точката $M_0(x_0, f(x_0))$, чието уравнение е

$$y - f(x_0) = m\,(x - x_0)\,, \tag{6.11а}$$

където

$$m = f'(x_0) \tag{6.11б}$$

е ъгловият коефициент на допирателната. От уравнения (6.11) се вижда, че допирателната ℓ е графиката на линейната функция

$$y = g(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,. \tag{6.12}$$

В общия случай диференчното частно $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ зависи от Δx. Диференчното частно $\dfrac{\Delta g}{\Delta x}$, обаче, не зависи от Δx:

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = m,$$

което веднага се вижда от фигура 6.5, тъй като $m = \operatorname{tg}\alpha$, където α е ъгълът, който допирателната ℓ сключва с положителната посока на абсцисната ос Ox. Но $m = f'(x_0)$. Следователно

$$\Delta g = f'(x_0)\,\Delta x\,. \tag{6.13}$$

До това равенство може да се стигне също чрез директно пресмятане на нарастването Δg, позовавайки се на явния вид (6.12) на функцията $g(x)$.

Сравнението на формулите (6.8) и (6.13) показва, че $\mathrm{d}f(x_0) = \Delta g$, т.е. *диференциалът на функцията $f(x)$ в точката x_0 представлява нарастването Δg в тази точка на линейната функция $g(x)$, чиято графика е допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката $M_0(x_0, f(x_0))$*, вж. фиг. 6.5. В това се състои геометричният смисъл на диференциала на функцията $f(x)$.