7. Основни правила за диференциране. Производни на основните елементарни функции

Операцията за намиране на производната $f'(x)$ на една функция $f(x)$ се нарича **диференциране**.

7.1. Основни правила за диференциране

Теорема 7.1. *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са диференцируеми в точката x, то сумата $f+g$, разликата $f-g$, произведението fg и частното им f/g (при $g(x)\neq 0$) са също диференцируеми в тази точка. При това са в сила следните правила за намиране на тези производни:*

а) $[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x)$,

б) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,

в) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Теорема 7.2. *Ако функцията $u=f(x)$ е диференцируема в точката x_0, а функцията $y=g(u)$ е диференцируема в точката $u_0=f(x_0)$, то сложната функция $h(x)=g[f(x)]$ е диференцируема в точката x_0. При това в сила е следното правило за диференциране:*

$$h'(x_0)=g'(u_0)f'(x_0)=g'[f(x_0)]f'(x_0)\,.$$

7.2. Производни на основните елементарни функции.

В предишния въпрос показахме, че

$$(C)'=0 \quad (C \text{ е константа}), \tag{1}$$

$$(x)'=1 \quad \text{и} \quad (x^2)'=2x\,.$$

Аналогично се установява, че

$$(x^\alpha)'=\alpha\, x^{\alpha-1} \tag{2}$$

когато α е естествено число. За произволно реално число α тази формула е също вярна, което ще покажем в т. 3. В частност, имаме

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\,\frac{1}{x^2} \qquad (x\neq 0),$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x>0).$$

Чрез използване на определението за производна и правилата за диференциране, съдържащи се в последните две теореми, лесно може да се намерят формули за производните на останалите основни елементарни функции. Намирането на някои от тях ще изложим в т. 3. Тук ще приведем само таблицата на тези производни:

$$(a^x)'=a^x\,\ln a \qquad (0<a\neq 1)\,, \tag{3}$$

в частност,

$$(e^x)'=e^x\,.$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\,\ln a} \qquad (x>0, \quad 0<a\neq 1)\,, \tag{4}$$

в частност,

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\,.$$

$$(\sin x)'=\cos x\,. \tag{5}$$

$$(\cos x)'=-\,\sin x\,. \tag{6}$$

$$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad (x\neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\,\pi}{2})\ldots)\,. \tag{7}$$

$$(\mathrm{cotg}x)'=-\,\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (x\neq 0, \pm\pi, \pm 2\,\pi)\ldots)\,. \tag{8}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1)\,. \tag{9}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)\,. \tag{10}$$

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{11}$$

$$(\mathrm{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}\,. \tag{12}$$

7.3. Примери: производни на показателната, логаритмичната и степенната функция.

Графиките на показателната и логаритмичната функция са гладки линии (без "ъглови точки") и допирателните към тях не са вертикални. Това геометрично означава, че тези функции имат крайни производни в съответните им дефиниционни множества.

Да намерим първо производната на показателната функция $f(x) = a^x$. Съгласно определението за производна имаме

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x\,\frac{a^h-1}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\,,$$

т. е.,

$$(a^x)' = a^x\,C(a)\,, \tag{13}$$

където

$$C(a) = \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} \tag{14}$$

е константа (в смисъл, че не зависи от x), зависеща от основата a.

Да допуснем, че съществува такава основа a, за която $C(a) = 1$. Според смисъла на границата (14), това означава, че

$$\frac{a^h-1}{h} \approx 1\,,$$

когато $|h|$ е много малко положително число. На свой ред това е еквивалентно на приближението

$$a^h - 1 \approx h\,,$$

или

$$a^h \approx 1 + h\,.$$

Повдигайки двете страни на последното приближено равенство на степен $1/h$, получаваме

$$a \approx (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

за произволно малки по абсолютна стойност числа h, което означава, че

$$a = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\,. \tag{15}$$

Но последната граница може да служи като определение за неперовото число $e = 2.71828\ldots$. (Да напомним, че

$$e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\,, \tag{16}$$

където $t = 1/x$). Така показахме, че ако $C(a) = 1$, то $a = e$. Лесно се проверява, че обратното твърдение е също вярно, т. е., ако $a = e$, то $C(e) = 1$. Тогава от равенството (13) веднага следва, че *експоненциалната функция $y = e^x$ се запазва при диференциране:*

$$(e^x)' = e^x\,. \tag{17}$$

Нека сега в тъждеството

$$y = e^{\ln y}\,,$$

което е следствие от факта, че функциите $y = e^u$ и $u = \ln y$ са взаимно обратни, да положим $y = a^x$. Така получаваме

$$a^x = e^{\ln a^x}\,.$$

Имайки предвид равенството $\ln a^x = x\ln a$, представяме

$$a^x = e^{x\ln a} = e^{qx}\,, \tag{18}$$

където $q = \ln a$ е константа. Позовавайки се на правилото за диференциране на сложна функция и формулата (17), от (18) намираме

$$(a^x)' = e^{qx}\,(qx)' = e^{qx}\,q = a^x\,q\,.$$

Така достигнахме до по-общата формула

$$(a^x)' = a^x\,\ln a\,, \tag{19}$$

т. е., показахме, че $C(a) = \ln a$ в (13).

За да намерим производната на логаритмичната функция, да диференцираме двете страни на тъждеството

$$a^{\log_a x} = x\,. \tag{20}$$

Позовавайки се на правилото за диференциране на сложна функция и току-що изведената формула (19), намираме последователно

$$a^{\log_a x}\,\ln a\,(\log_a x)' = (x)'\,,$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^{\log_a x}\,\ln a}$$

или, имайки предвид отново тъждеството (20), достигаме до формулата

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\,\ln a}\,. \tag{21}$$

В частност, при $a = e$ имаме

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\,. \tag{22}$$

Накрая да намерим производната на степенната функция $y = x^\alpha$ при произволно α. Да запишем тъждеството $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha}$ във вида

$$x^\alpha = e^{\alpha\,\ln x} \qquad \text{при} \quad x > 0\,. \tag{23}$$

Позовавайки се на правилото за диференциране на сложна функция и формулите (17) и (22), оттук намираме

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha\,\ln x}\,(\alpha\,\ln x)' = e^{\alpha\,\ln x}\,\frac{\alpha}{x}$$

и, имайки предвид тъждеството (23), получаваме

$$(x^\alpha)' = x^\alpha\,\frac{\alpha}{x}\,,$$

т. е.,

$$(x^\alpha)' = \alpha\,x^{\alpha-1} \qquad \text{при} \quad x > 0\,. \tag{24}$$