8. Основни теореми на диференциалното смятане: теореми на Лагранж, Рол и Коши

Теорема на Лагранж. *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$ и е диференцируема в отворения интервал (a,b). Тогава съществува такава точка $c \in (a,b)$, че да е в сила формулата*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)\,, \qquad (8.1)$$

*наречена **формула на Лагранж**.*

Веднага ще отбележим, че ако във формулата (8.1) положим $a = x_0$ и $b = x_0 + \Delta x$, тази формула приема вида

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\,\Delta x\,, \qquad (8.2)$$

където c е точка между x_0 и $x_0 + \Delta x$. Равенството (8.2) дава точна връзка между нарастванията на функцията $f(x)$ и нейния аргумент. Ето защо формулата на Лагранж се нарича още *формула за крайните нараствания.* Тя се явява аналогът на формулата $df = f'(x_0)\,dx$, която е вярна само за безкрайно малки нараствания dx и dy. Къде се намира точно точката c, обаче, е неизвестно. Формалната замяна на точката c с x_0 в (8.2) – нещо, което е оправдано за много малки стойности на $|\Delta x|$ – води до приближеното равенство $\Delta f \approx f'(x_0)\,\Delta x$, т.е. $\Delta f \approx df$.

Теоремата на Лагранж е очевидна от геометрични и физични съображения. Наистина, ако разделим двете страни на равенството (8.1) с $b-a$ (при $b \neq a$), ние го записваме в еквивалентната форма

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\,. \qquad (8.3)$$

От Фигура 8.1 се вижда, че лявата страна на това равенство е равна на ъгловия коефициент m_{AB} на секущата AB, минаваща през точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, а дясната му страна, съгласно геометричния смисъл на производната, е равна на ъгловия коефициент m_ℓ на допирателната ℓ към графиката на функцията $f(x)$ в точката $C(c, f(c))$. Ето защо формулата на Лагранж е еквивалентна на равенството $m_{AB} = m_\ell$, което на свой ред означава,

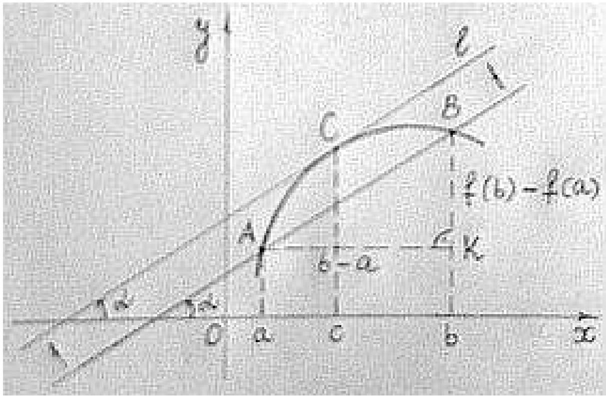

Figure 1: Секущата AB може така да се пренесе успоредно на себе си, че тя да стане допирателна към графиката на функцията в точката $C(c, f(c))$

че секущата AB и допирателната ℓ са успоредни. Следователно теоремата на Лагранж има следния геометричен смисъл: *Секущата AB може така да се пренесе успоредно на себе си, че тя да стане допирателна към графиката на функцията в точка C, чиято абсциса c се намира в интервала (a,b).* Верността на това твърдение е интуитивно ясна.

Да предположим сега, че променливата x е времето t, т. е., функцията $s = f(t)$ е законът на движение на точка в интервала от време $[a,b]$. Тогава лявата страна на равенството (8.3) е средната скорост на движение $v^*(a,b)$ в интервала $[a,b]$, а дясната му страна, съгласно механичния смисъл на производната, е равна на скоростта на движението $v(c)$ на точката в момента c. Ето защо формулата на Лагранж е еквивалентна на равенството $v^*(a,b) = v(c)$. Следователно теоремата на Лагранж има следния механичен смисъл: *При движението в интервала от време $[a,b]$ на една точка* (например, автомобил) *има момент от време $t = c$, в който точката се движи със средната си скорост на движение в този интервал* (макар че в някои моменти тя може да се движи със скорост по-малка, а в други по-голяма от средната скорост) – факт, който е също интуитивно ясен. Това тълкуване на теоремата на Лагранж обяснява защо тя се нарича още *теорема за средните стойности в диференциалното смятане.*

В частният случай, когато $f(a) = f(b)$, теоремата на Лагранж води до следното твърдение.

Теорема на Рол. *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцируема е в отворения интервал (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува такава точка $c \in (a, b)$, в която $f'(c) = 0$.*

Геометрично теоремата на Рол означава, че има точка $C(c, f(c))$ от графиката на функцията, в която допирателната е успоредна на абсцисната ос Ox.

Следващата теорема е обобщение на теоремата на Лагранж за две функции.

Теорема на Коши. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$, диференцируеми са в отворения интервал (a, b) и $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$. Тогава съществува такава точка $c \in (a, b)$, че да е в сила формулата*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,, \tag{8.4}$$

наречена ***формула на Коши****.*

Наистина, ако $g(x) = x$, то $g'(x) = 1$ и от формулата (8.4) веднага следва формулата Лагранж, записана във вида (8.3).