9. Производни от по-висок ред. Теорема на Тейлър

Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала (a,b) и да предположим, че нейната производна $f'(x)$ е функция, имаща производна в точката $x \in (a,b)$. Тази производна на $f'(x)$ се нарича втора производна на функцията f в точката x и се означава със символа $f''(x)$ (или $f^{(2)}(x)$), т. е. $f''(x) = [f'(x)]'$. По-нататък, ако се окаже, че функцията $f(x)$ има крайна втора производна във всяка точка $x \in (a,b)$, то производната на тази производна $f'''(x) = [f''(x)]'$, ако тя съществува, се нарича трета производна на функцията f в точката x, и т. н. . Въобще, ако $f(x)$ има $n-1$-ва производна $f^{(n-1)}(x)$ в интервала (a,b), то производната ѝ

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' , \tag{9.1}$$

ако тя съществува, се нарича n-та производна на функцията f в точката x. Тогава функцията f се нарича *n пъти диференцируема в точката x.* Производните $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, …, $f^{(n)}(x)$ се наричат още производни от първи, втори, трети, … , n-ти ред. Понякога за тези производни се използват и съответните означения на Лайбниц

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}, \dots, \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}.$$

Както вече показахме, първата производна на пътя $s = f(t)$ относно времето t, която се означава също с $\dot{f}(t)$, дава скоростта на движение $v(t)$ в момента t: $v(t) = \dot{f}(t)$. Величината

$$a^*(t_0, t) = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}, \tag{9.2}$$

имаща смисъла на изменението на скоростта за единица време, се нарича *средно ускорение на движение в интервала от време* $[t_0, t]$. Нейната граница

$$a(t_0) = \lim_{t\to t_0} a^*(t_0, t) = \lim_{t\to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \tag{9.3}$$

се нарича *ускорение на движение в момента* t_0. Но последната граница представлява производната на скоростта $v(t)$ в момента t, т. е.

$$a(t_0) = \dot{v}(t_0). \tag{9.4}$$

Спомняйки си, че $v(t) = \dot{f}(t)$, от (9.4) стигаме до заключението, че *ускорението на движение в момента t_0 представлява втората производна на пътя относно времето*:

$$a(t_0) = \ddot{f}(t_0), \tag{9.5}$$

което изразява механичния смисъл на втората производна. (За тази производна тук използвахме означението $\ddot{f}$, което обикновено се среща в естествените науки, когато независимата променлива t има физическия смисъл на време.) Производните от по-висок ред от втори вече нямат толкова интуитивно ясен смисъл.

Теорема на Тейлър. *Нека функцията $f(x)$ е $n+1$ пъти диференцируема в интервала (a,b), съдържащ точката x_0. Тогава за всяка точка x от интервала (a,b), различна от x_0, може да се намери такава точка ξ, намираща се между x_0 и x, че да е в сила формулата*[?]

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x), \tag{9.6}$$

където функцията $R_{n+1}(x)$ зависи от $n+1$-та производна на f в точката ξ и се нарича

остатъчен член. Най-често $R_{n+1}(x)$ се изразява в следната ***форма на Лагранж***:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\,. \tag{9.7}$$

Формулата (9.6) се нарича ***формула на Тейлър***? . Въвеждайки полинома от n-та степен

$$P_n(x;x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n\,, \tag{9.8}$$

който се нарича ***полином на Тейлър***, формулата (9.6) може да се запише във вида

$$f(x) = P_n(x;x_0) + R_{n+1}(x)\,. \tag{9.9}$$

Следователно остатъчният член $R_{n+1}(x)$ дава грешката, която ще получим, ако заменим функцията $f(x)$ с нейния полином на Тейлър, т. е., ако използваме приближеното равенство

$$f(x) \approx P_n(x;x_0)\,. \tag{9.10}$$

За широк клас от функции $f(x)$, срещащи се често в естествознанието, тази грешка намалява (т. е., приближеното равенство (9.10) става все по-точно) с нарастването на n.

При $n=0$ формулата на Тейлър има вида

$$f(x) = f(x_0) + R_1(x)\,, \tag{9.11}$$

където $R_1(x) = f'(\xi)\,(x-x_0)$. Полагайки $x = x_0 + \Delta x$, веднага виждаме, че формулата (9.11) е еквивалентен запис на формулата на Лагранж (8.2).

При $n=1$ имаме

$$P_1(x;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)$$

Веднага се вижда, че тогава приближеното равенство (9.10) е всъщност приближението $\Delta f \approx \mathrm{d}f$.

В частния случай, когато $x_0 = 0$, формулата на Тейлър приема вида

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + R_{n+1}(x)\,, \tag{9.12}$$

където

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,. \tag{9.13}$$

Формулата (9.12) се нарича също *формула на Маклорен*? .

Пример. Да изведем формулата на Маклорен за експоненциалната функция $f(x) = e^x$. При диференциране тази функция се запазва: $f^{(k)}(x) = e^x$, $k = 0,1,2,\ldots$, за всяко $x \in (-\infty,+\infty)$. (Приехме означението $f^{(0)}(x)$ за самата функция $f(x)$.) Следователно $f^{(k)}(0) = 1$ при $k = 0,1,2,\ldots$. Тогава редът на Маклорен (9.12) приема вида:

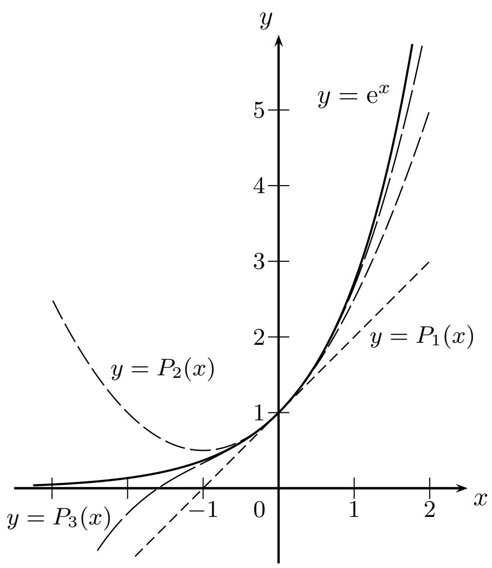
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)\,,$$

където

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,,$$

$0 < \xi < x$ при $x > 0$, или $x < \xi < 0$ при $x < 0$.

На фигура 9.1 са показани графиките на функцията $f(x) = e^x$ и приближенията (апроксимациите) ѝ с полиномите ѝ на Тейлър $P_1(x) = 1+x$, $P_2(x) = 1+x+\dfrac{x^2}{2}$



Фиг. 9.1

и $P_3(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$. Вижда се, че графиката на кубичната апроксимация $P_3(x)$ най-добре "прилепва" към графиката на функцията $f(x) = e^x$, когато x се намира в достатъчно малка околност на точката $x_0 = 0$.

---

[1] Символът $n!$ се чете "n-фактотиел" и означава произведението на всички естествени числа от 1 до n: $n! = 1.2\ldots n$. Например, $1! = 1,\ 2! = 1.2 = 2,\ 3! = 1.2.3 = 6$.

[2] Брук Тейлър (1685-1731) е английски математик и философ.

[3] Колин Маклорен (1698-1746) е шотландски математик.