2. Реални числа. Принцип за непрекъснатост. Модул

В този въпрос ще припомним някои основни факти за реалните числа, които се разглеждат в училищния курс по математика, като същевременно ще добавим и нови сведения.

В математиката първоначално са въведени **естествените числа** $1, 2, 3, \ldots$, които са възникнали непосредствено от практиката. Множеството на естествените числа ще означаваме с $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Ако към естествените числа добавим нулата и отрицателните числа, които се можем да дефинираме като на всяко естествено число $n \in \mathbb{N}$ съпоставим такова ново число, означено с $-n$, че да е изпълнено $n + (-n) = 0$, се получава множеството на **целите числа**, което ще означаваме с $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

В множеството на целите числа операцията изваждане е винаги осъществима, или казано по друг начин, уравнението $a + x = b$ винаги има решение.

Следващото разширение е свързано с въвеждането на **рационалните (т.е. дробните) числа**. Всяко такова число има вида $\dfrac{m}{n}$, където m е цяло число, а n - естествено число. Множеството на рационалните числа се означава с $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Рационалните числа се записват като крайни или като безкрайни периодични десетични дроби, например:

$$\frac{1}{8} = 0.125; \frac{1}{3} = 0.33333\ldots = 0.(3); \frac{1}{7} = 0.(142857).$$

Множеството на рационалните числа има това предимство пред множеството на целите числа, че в него винаги е осъществима операцията деление на число, различно от 0. С други думи, уравнението $ax = b$, където $a, b \in \mathbb{Q}$ и $a \neq 0$, винаги има решение $x = \dfrac{b}{a}$.

Следващият класически пример показва, че и рационалните числа се нуждаят от разширение.

Пример 1. *Уравнението* $x^2 = 2$ *няма рационално решение.*

Действително, да допуснем че числото $x = \dfrac{m}{n}$, където $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ е решение на това уравнение. Можем да считаме, че дробта $\dfrac{m}{n}$ е несъкратима (в противен случай можем да съкратим). Имаме $\dfrac{m^2}{n^2} = 2$, т.е. $m^2 = 2n^2$. От това следва, че m е четно число. Нека да положим $m = 2k$, заместваме и получаваме $2k^2 = n^2$, откъдето следва, че и n е четно число. По този начин стигаме до противоречие с несъкратимостта на дробта $\dfrac{m}{n}$, т.е. доказахме, че не съществува рационално число, удовлетворяващо уравнението $x^2 = 2$.

От друга страна ако разгледаме квадрат с дължина на страните 1, то дължината на неговия диагонал е решение на уравнението $x^2 = 2$.

По този начин от геометрични съображения стигаме до извода, че освен рационалните числа съществуват и други (ирационални числа). Множеството на **ирационалните числа** се означава с $\mathbb{I}$ и се състои от тези числа, които се записват като безкрайни непериодични десетични дроби.

Множеството на **реалните числа** $\mathbb{R}$ може да се дефинира като обединение на множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$ и множеството на ирационалните числа $\mathbb{I}$. Нагледно си представяме реалните числа като точките върху дадена права (наречена реална права или реална ос). Това дава възможност да си представяме геометрично математическите обекти и техните свойства и улеснява разбирането на много математически понятия и теореми.

Основна роля по-нататък ще играят специални множества от реални числа, наречени интервали. Различаваме следните видове интервали:

1) Крайни интервали - всеки **краен интервал** се определя от две числа a и b, $a < b$, наречени съответно ляв и десен край на интервала и съдържа всички числа x, удовлетворяващи неравенствата $a < x < b$. Всеки краен интервал се изобразява върху реалната права като отсечка.

В зависимост от това дали причисляваме крайните точки имаме отворени, затворени и полузатворени отляво или отдясно интервали:

а) **Отворен интервал** с краища a и b - означава се с (a, b). По определение $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

б) **Затворен интервал** с краища a и b - означава се с $[a, b]$. По определение $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

в) **Полузатворен отляво интервал** с краища a и b - означава се с $[a, b)$. По определение $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

г) **Полузатворен отдясно интервал** с краища a и b - означава се с $(a, b]$. По определение $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$.

2) **Безкрайни интервали** - върху реалната права се изобразяват като полуправа или съвпадат с цялата реална права. За означението им се изполват символите $-\infty$ и $+\infty$ (минус безкрайност и плюс безкрайност). По определение имаме

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$;

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$;

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$;

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$;

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Ще припомним понятието **модул** (абсолютна стойност) на реално число. Ако $x \in \mathbb{R}$ и $x \geq 0$, то $|x| = x$, а ако $x \leq 0$, то $|x| = -x$.

Свойства на модула:

1) $|x| = \max(x, -x)$ за $x \in \mathbb{R}$;

2) $|x| = 0 \iff x = 0$;

3) $|x| = |-x|$ за $x \in \mathbb{R}$;

4) $|xy| = |x|\,|y|$ за $x, y \in \mathbb{R}$;

5) $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ за $x, y \in \mathbb{R}$.

Ако x и y са реални числа, то числото $|x - y|$ геометрично се тълкува като разстояние между съответните точки върху реалната права.

Например неравенството $|x - a| < \varepsilon$ означава, че разстоянието между точката x и точката a е по малко от ε, т.е. x се намира в интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ или, което е същото, $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

Всеки отворен интервал, който съдържа числото a, се нарича **околност** на a. Интервалите от вида $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, се наричат симетрични околности (или ε-околности) на a.

Определение 1. *Множеството M от реални числа се нарича **ограничено отгоре**, ако съществува такова число P, че $x \leq P$ за всяко $x \in M$. Всяко такова число P се нарича **горна граница** на множеството M. Най-малката от всички горни граници на множеството M се нарича **точна горна граница** и се бележи с $\sup M$ (чете се супремум на M).*

Определение 2. *Множеството M от реални числа се нарича* ***ограничено отдолу****, ако съществува такова число P, че $x \geq P$ за всяко $x \in M$. Всяко такова число P се нарича* ***долна граница*** *на множеството M. Най-голямата от всички долни граници на множеството M се нарича* ***точна долна граница*** *и се бележи с $\inf M$ (чете се инфимум на M).*

Съществуването на точна горна граница се гарантира от следната фундаментална

Теорема 1 (Принцип за непрекъснатост). *Всяко непразно ограничено отгоре множество от реални числа има точна горна граница.*

Доказателство. Нека M е непразно ограничено отгоре множество от реални числа и нека предположим допълнително, че в M има положителни числа. Тогава очевидно горните граници на M и на множеството $M^+ = \{x \in M : x > 0\}$ ще бъдат едни и същи. Разглеждаме целите части на числата $x \in M^+$. Тъй като M^+ е ограничено, то те ще приемат краен брой стойности и измежду тях ще има най-голямо число. Означаваме с m_0 най-голямата от целите части на числата $x \in M^+$. Нека M_0^+ е множеството на онези $x \in M^+$, които имат цяла част, равна на m_0. Всяко число $x \in M_0^+$ има вида

$$x = m_0 + 0.x_1x_2x_3 \ldots .$$

Нека означим с m_1 най-голямата от цифрите, които имат числата $x \in M_0^+$, на първо място след десетичната запетая. Тъй като има краен брой възможности - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то такава най-голяма цифра съществува.

Разглеждаме множеството M_1^+ на онези числа $x \in M_0^+$, които имат на първо място след десетичната запетая цифрата m_1 и означаваме с m_2 най-голямата от цифрите, които имат числата $x \in M_1^+$ на второ място след десетичната запетая.

След това разглеждаме множеството M_2^+ на онези числа $x \in M_1^+$, които имат на второ място след десетичната запетая цифрата m_2 и означаваме с m_3 най-голямата от цифрите, които имат числата $x \in M_2^+$ на трето място след десетичната запетая.

Продължавайки така определяме число

$$m = m_0 + 0.m_1m_2m_3 \ldots .$$

Очевидно m е горна граница на множеството M. Ще покажем, че x е най-малката горна граница на множеството M. Взимаме произволно число $a < m$. Ако $a \leq 0$, то a не е горна граница, тъй като по допускане в M има положителни числа. Ако $a > 0$, то числото a има вида

$$a = a_0 + 0.a_1a_2a_3 \ldots ,$$

където a_0 е цялата част на a. От неравенството $a < m$ получаваме, че за някое k

$$a_0 = m_0, a_1 = m_1, \ldots , a_{k-1} = m_{k-1}, a_k < m_k.$$

От друга страна цифрата m_k е най-голямата цифра, която имат на k-то място след десетичната запетая онези числа от множеството M, чиято цяла част е m_0, а дробната им част има на първите $k-1$ места съответно цифрите $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$. Следователно в M съществува число y от вида

$$y = m_0 + 0.m_1 m_2 \ldots m_k y_{k+1} \ldots .$$

Очевидно $a < y$, което показва, че числото a не е горна граница на M. С това доказахме, че ако $a < m$, то a не е горна граница на M, т.е. m е най-малката горна граница на множеството M.

2) Да разгледаме сега случая, когато M се състои само от неположителни числа (отрицателни или нула). Ако $0 \in M$, то очевидно нулата е точната горна граница на M. Ако M съдържа само отрицателни числа, то всяко число в M се представя с отрицателна безкрайна десетична дроб. По аналогия с използваната по-горе процедура означаваме с m_0 най-малката по модул от целите части на тези дроби, с m_1 - най-малката от първите цифри след десетичната запетая на онези числа от M, които имат цяла част m_0, с m_2 - най-малката от вторите цифри след десетичната запетая на тези числа от M, които имат цяла част m_0 и първа цифра след запетаята m_1 и т.н.

Така получаваме реалното число

$$m = -m_0 - 0.m_1 m_2 m_3 \ldots,$$

което е точна горна граница на M. $\square$

Следствие 1. *Всяко непразно ограничено отдолу множество от реални числа има точна долна граница.*

Доказателство. Ако A е ограничено отдолу множество от реални числа, то очевидно множеството $B = \{-x : x \in A\}$ е ограничено отгоре. Нека означим с z точната горна граница на множеството B. Тогава лесно се вижда, че числото $-z$ е точната долна граница на множеството A. $\square$