# 4. Функции на една независима променлива – основни понятия, графика на функция, сложна функция

## 4.1. Понятие за функция. Начини за задаване на функция.

**Определение 1.** *Нека $X$ и $Y$ са множества от реални числа ($X, Y \subset \mathbb{R}$) и нека по някакво правило, означено с $f$, на всяко число $x$ от множеството $X$ е съпоставено* ***единствено*** *число $y$ от множеството $Y$. Това правило $f$ се нарича функция, дефинирана в множеството $X$ и приемаща стойности в множеството $Y$.*

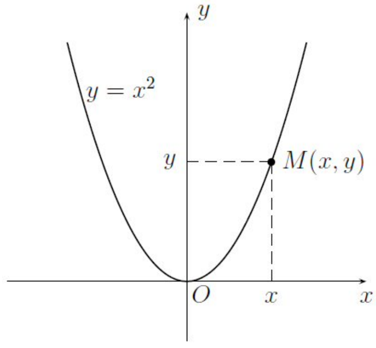
В Определение 1 $x$ може да се разглежда като променлива величина, пробягваща множеството $X$. Ето $x$ защо се нарича **независима променлива** или **аргумент** на функцията, а образът $y$ - **зависима променлива** или **стойност на функцията**.

Множеството $X$ се нарича **дефиниционна област** на функцията $f$. Означава се с $D_f$.

Множеството $R_f = \{f(x) : x \in D_f\}$, състоящо се от всички стойности $y = f(x)$, които функцията $f$ приема когато $x$ пробягва дефиниционната област $D_f$, се нарича **множество от стойности** на функцията $f$.

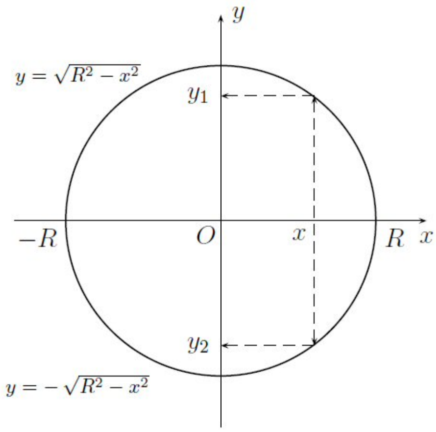
Множеството $\Gamma_f = \{M(x, f(x)) : x \in D_f\}$, състоящо се от всички точки $M(x, f(x))$ в равнината $Oxy$, които се получават, когато $x$ пробягва дефиниционната област $D_f$, се нарича графика на функцията $f$.

Например, графиката на квадратната функция $y = x^2$ е парабола. Функцията е дефинирана навсякъде, т.е. $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Тъй като винаги $x^2 \geq 0$, то множеството от стойности $R_f$ е интервалът $[0, +\infty)$.




Графиката на функция, дефинирана в интервал $(a, b)$, обикновено представлява крива в равнината. Не всяка крива в равнината, обаче, е графика на функция.

Например, окръжността с уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ не е графика на функция, тъй като чрез окръжността на всяко $x$ от интервала $(-R, R)$ се съпоставят две числа: $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y_2 = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Според Определение 1 на всяко фиксирано $x_0$ чрез графиката на функцията трябва да се съпостави единствено $y_0$. Това геометрично означава, че всяка вертикална права $x = x_0$ пресича графиката на функцията само в една точка.




Има три основни начина за задаване на функция:

**1. Аналитичен начин.** Функцията се задава с помощта на една или няколко формули. На свой ред това задаване може да бъде явно, неявно или параметрично.

**а) явно задаване.** Функцията се задава чрез формула от вида $y = f(x)$. Например $y = x^2$, $y = e^x$, $y = \sin x + \cos x$. Функция, зададена по този начин, се нарича **явна**.

**б) неявно задаване.** Функцията се задава чрез уравнение от вида $F(x, y) = 0$. За да изразим явна функция, определена неявно от това уравнение, трябва да го решим относно $y$. Функция, зададена по този начин, се нарича **неявна**.

Например, уравнението $x^2 + y^2 = R^2$ задава неявно две функции, дефинирани в интервала $[-R, R]$, чиито графики са: горната полуокръжност - на функцията $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и долната - на $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

**в) параметрично задаване.** Функцията $y$ с аргумент $x$ се задава с помощта на две функции

$$x = \varphi(t), y = \psi(t),$$

чийто аргумент $t$, изменящ се в интервал $[\alpha, \beta]$, се нарича параметър.

Например, да разгледаме функцията, зададена параметрично чрез

$$x = R\cos t, y = R\sin t, t \in [0, \pi].$$

Като повдигнем на квадрат двете страни на тези уравнения и ги съберем, получаваме уравнението $x^2 + y^2 = R^2$. Тъй като $x$ пробягва интервала $[-R, R]$ и $y \geq 0$ при $t \in [0, \pi]$, то параметрично зададената функция е $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

**2. Табличен начин.** Функцията се задава с помощта на таблица, съдържаща стойностите на аргумента и съответните стойности на функцията. Например, като резултат на измервания може да се направи таблица, изразяваща зависимостта на температурата от надморската височина.

**3. Графичен начин.** Функцията се задава чрез нейната графика, построена в дадена координатна система.

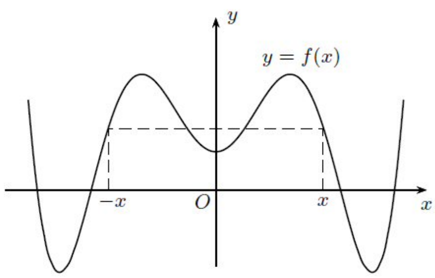
## 4.2. Четни и нечетни функции.

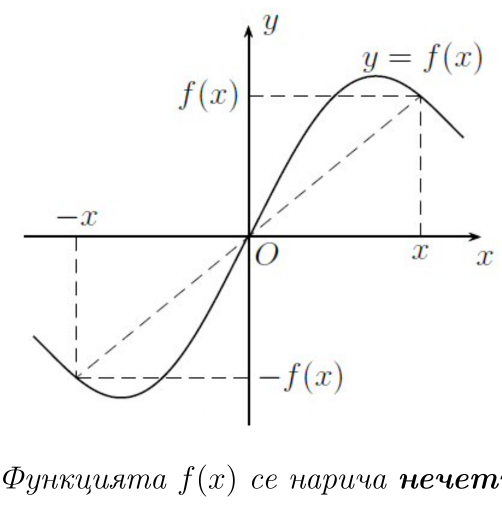
**Определение 2.** *Функцията $f(x)$ се нарича* ***четна****, ако:*

*1) за всяко $x \in D_f$ е изпълнено, че $-x \in D_f$;*

*2) за всяко $x \in D_f$ е изпълнено, че $f(-x) = f(x)$.*

Графиката на всяка четна функция е симетрична относно ординатната ос $Oy$. Например, четни функции са $y = 1$, $y = x^2$, $y = \cos x$.




**Определение 3.** *Функцията $f(x)$ се нарича* ***нечетна****, ако:*

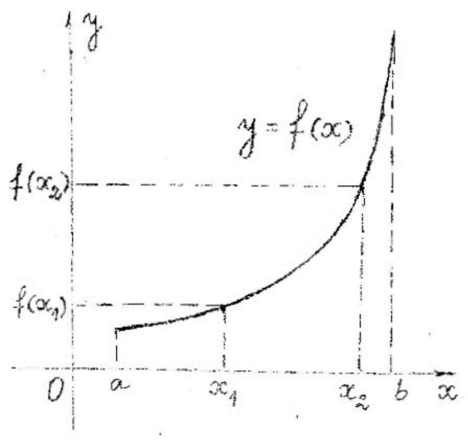
*1) за всяко $x \in D_f$ е изпълнено, че $-x \in D_f$;*

*2) за всяко $x \in D_f$ е изпълнено, че $f(-x) = -f(x)$.*

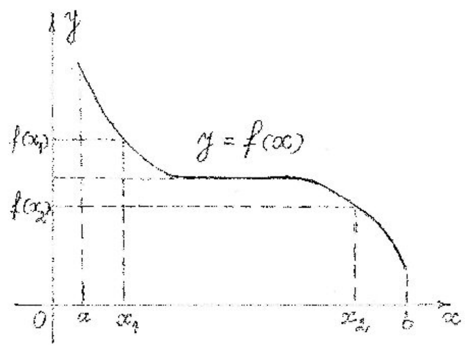
Графиката на всяка нечетна функция е симетрична относно координатното начало О. Например, нечетни функции са $y = x$, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$.

## 4.3. Монотонни функции.

**Определение 4.** *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a, b)$. Функцията $f(x)$ се нарича* ***монотонно растяща*** *в интервала $(a, b)$, ако за всеки две стойности $x_1, x_2 \in D_f$, за които $x_1 < x_2$, е изпълнено $f(x_1) \leq f(x_2)$, т.е. стойностите на $f(x)$ нарастват с нарастването на аргумента $x$. Ако е изпълнено строгото неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, функцията се нарича* ***строго монотонно растяща***.




**Определение 5.** *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a, b)$. Функцията $f(x)$ се нарича* ***монотонно намаляваща*** *в интервала $(a, b)$, ако за всеки две стойности $x_1, x_2 \in D_f$, за които $x_1 < x_2$, е изпълнено $f(x_1) \geq f(x_2)$, т.е. стойностите на $f(x)$ намаляват с нарастването на аргумента $x$. Ако е изпълнено строгото неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, функцията се нарича* ***строго монотонно намаляваща***.




Монотонно растящите и монотонно намаляващите функции се наричат **монотонни функции**.

Графиката на една монотонно растяща функция върви отдолу нагоре, а на монотонно намаляваща функция - отгоре надолу, когато се движим отляво надясно.

Квадратната функция $y = x^2$ е строго монотонно намаляваща в интервала $(-\infty, 0)$ и е строго монотонно растяща в интервала $(0, +\infty)$.

## 4.4. Ограничени функции.

**Определение 6.** *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a, b)$. Функцията $f(x)$ се нарича **ограничена отгоре** в интервала $(a, b)$, ако съществува константа $M$ такава, че за всяко $x \in (a, b)$ е изпълнено $f(x) \le M$.*

**Определение 7.** *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a, b)$. Функцията $f(x)$ се нарича **ограничена отдолу** в интервала $(a, b)$, ако съществува константа $m$ такава, че за всяко $x \in (a, b)$ е изпълнено $f(x) \ge m$.*

**Определение 8.** *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a, b)$. Функцията $f(x)$ се нарича **ограничена** в интервала $(a, b)$, ако тя е ограничена отдолу и отгоре в този интервал, т.е. съществуват константи $m$ и $M$ такива, че за всяко $x \in (a, b)$ е изпълнено $m \le f(x) \le M$.*

За да бъде една функция ограничена отгоре в даден интервал геометрично означава графиката на функцията в този интервал да бъде разположена под хоризонталната права $y = M$, а за да бъде ограничена отдолу - над хоризонталната права $y = m$.

Квадратната функция $y = x^2$ е ограничена отдолу, но не е ограничена отгоре в интервала $(-\infty, +\infty)$. Функцията $y = \sin x$ е ограничена в цялата си дефиниционна област - интервала $(-\infty, +\infty)$, тъй като $-1 \le \sin x \le 1$ за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$

## 4.5. Операции с функции.

Нека функциите $f$ и $g$ имат една и съща дефиниционна област $D$. Тогава за тези функции се дефинират сума $f+g$, разлика $f-g$, произведение $fg$ и частно $f/g$ по следните естествени правила:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D,$$

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x), x \in D,$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \text{ и } g(x) \neq 0.$$

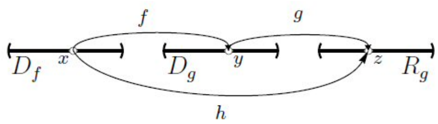
Така дефинираните операции с функции се наричат аритметични.

Друга важна операция с функции е композицията на функции.

**Определение 9.** *Нека функцията $y = f(x)$ има дефиниционна област $D_f$ и множество от стойности $R_f$, а функцията $z = g(y)$ има дефиниционна област $D_g$ и $f(x) \in D_g$ за всяко $x \in D_f$, т.е. $R_f \subset D_g$. Функцията $z = h(x)$, дефинирана в $D_f$ чрез*

$$h(x) = g[f(x)],$$

*се нарича* ***композиция*** *на функциите $f$ и $g$ в посочения ред. За функцията $h(x)$ се използват също термините* ***сложна функция*** *и* ***съставна функция****.*




**Пример 1.** *Функцията $h(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$ може да се разглежда като композиция на функциите $y = f(x) = \sin x$ и $z = g(y) = y^2$.*