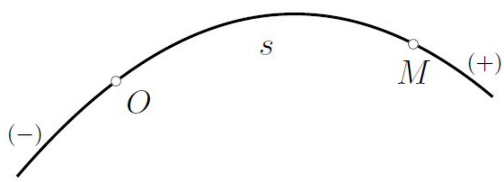
8. Производна на функция – определение, геометричен и механичен смисъл. Основни правила за диференциране. Производни на основните елементарни функции

В приложенията функциите обикновено възникват при описанието на физични величини, зависещи от някакви параметри. При изучаването на тези величини основна роля играе понятието скорост на изменение на съответната величина. Формализирането му с математически средства е довело до понятието производна на функция, което заема централно място в математическия анализ. Преди да дадем точното определение ще разгледаме два примера, които по естествен начин водят до понятието производна.

8.1. Механичен (физичен) смисъл на производната.

Разглеждаме движение на точка M по линия L. Върху линията фиксираме отправна точка O и избираме положителна посока. Тогава положението на точката M върху линията L се определя от дъговата координата s, равна на дължината λ_M на дъгата $\widehat{OM}$, ако точката M се намира върху "положителната страна" на линията L, и на $-\lambda_M$, ако M е върху "отрицателната страна" на L. Положението на точката M във всеки момент от време t се изразява чрез функция $s(t)$, наречена *закон на движение на точката.*



Да разгледаме движението на точката в интервала от време $[t_0, t]$. За този интервал, имащ дължина $\Delta t = t - t_0$ при $t > t_0$, дъговата координата s на точката ще получи изменение $\Delta s = s(t) - s(t_0)$. Вижда се, че ако движението се извършва по положителната посока на линията L, то Δs е дължината на пътя, изминат от точката за интервала $[t_0, t]$. Тогава частното $\Delta s/\Delta t$ има смисъл на "средния" път, изминат от точката за единица време.

Определение 1. *Величината*

$$v^*(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \tag{1}$$

се нарича ***средна скорост на движение в интервала*** $[t_0, t]$.

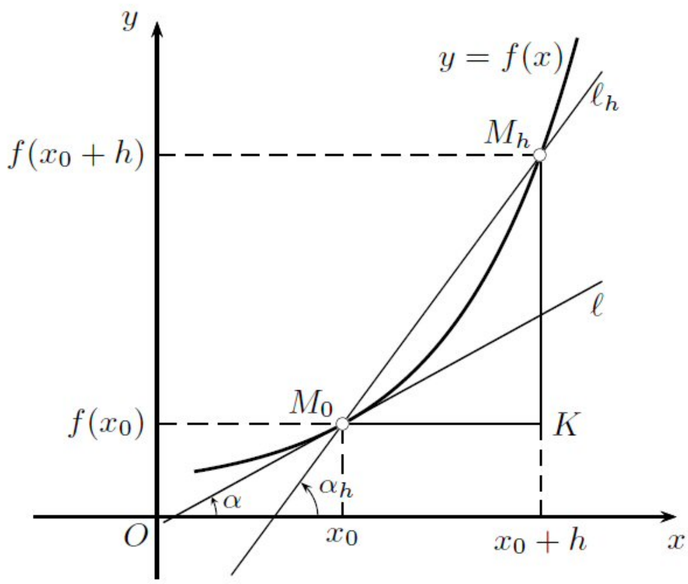
Интуитивно е ясно, че колкото интервалът от време $[t_0, t]$ е по-кратък (т.е. Δt е по-малко), толкова по-добре средната скорост v^* ще приближава реалната скорост. Следователно границата на средната скорост v^* когато t клони към t_0, представлява скоростта на точката в "безкрайно малък интервал" $[t_0, t_0 + \varepsilon]$. Ето защо естествено е да дадем следното определение.

Определение 2. *Границата на средната скорост при t клонящо към t_0,*

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v^*(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \tag{2}$$

се нарича ***скорост на движение в момента*** t_0.

8.2. Геометричен смисъл на производната.



Да предположим, че функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) и е непрекъсната в точката x_0 от този интервал. Нека h е толкова малко ($h \neq 0$), че точката $x_0 + h$ да принадлежи също на (a, b). Да разгледаме съответните точки $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M_h(x_0 + h, f(x_0 + h))$ от графиката на функцията $f(x)$. Тези две точки определят права ℓ_h, която се нарича *секуща към графиката на* $f(x)$. Изменението на h поражда съответно движение на точката M_h по графиката на $f(x)$, а следователно и на секущата ℓ_h, представляващо завъртане около точката M_0. При това, когато h става все по-малко и по-малко, точката M_h става все по-близо и по-близо до точката M_0, щом функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Можем да очакваме, че при това приближаване на M_h към M_0 секущата ще заеме някакво гранично положение ℓ, т.е., ще се превърне в права, минаваща през две "безкрайно близки" точки.

Определение 3. *Граничното положение ℓ на секущата ℓ_h, ако има такова, когато точката M_h се приближава към M_0, оставайки върху графиката на $f(x)$, се нарича* ***допирателна*** *(или* ***тангента****)* ***към графиката на функцията*** *$f(x)$* ***в точката*** *M_0.*

Както вече пояснихме по-горе, това приближаване на точката M_h към M_0 става точно тогава, когато h клони към нула.

Да отговорим на въпроса за съществуването на допирателна и да изведем нейното уравнение, когато тя съществува. Тъй като всяка секуща ℓ_h съединява две различни точки от графиката на функция - точките M_0 и M_h, то ℓ_h не е перпендикулярна на оста Ox. Нейното уравнение можем да запишем във формата на уравнение на права, минаваща през точката $M_0(x_0, f(x_0))$ и имаща ъглов коефициент m_h:

$$\ell_h : y - f(x_0) = m_h(x - x_0), \tag{3}$$

където

$$m_h = \frac{|KM_h|}{|M_0K|} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{4}$$

В уравнението (3) единствено ъгловият коефициент m_h зависи от h. Щом допирателната ℓ е граничното положение на секущата ℓ_h когато h клони към нула, то от уравненията (3) и (4) веднага можем да направим следното заключение:

Графиката на функцията $f(x)$ има в точката $M_0(x_0, f(x_0))$ допирателна ℓ, която не е перпендикулярна на оста Ox, тогава и само тогава, когато съществува границата

$$m = \lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{5}$$

При това, нейното уравнение е

$$\ell : y - f(x_0) = m(x - x_0). \tag{6}$$

По-горе предполагахме, че границата в (5) е крайна, което води до изискването допирателната ℓ да не е перпендикулярна на оста Ox. Дали има допирателна към графиката на $f(x)$, когато от (5) получим $m = +\infty$ или $m = -\infty$? За да отговорим на този въпрос, да си спомним, че $m_h = \operatorname{tg} \alpha_h$, където α_h е ъгълът, който секущата ℓ_h сключва с положителната посока на оста Ox. Можем да считаме, че $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha_h < \dfrac{\pi}{2}$. Функцията $\operatorname{tg} \alpha_h$, разглеждана в интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ клони към $+\infty$ само когато $\alpha_h \to \dfrac{\pi}{2}$ и клони към $-\infty$ само когато $\alpha_h \to -\dfrac{\pi}{2}$. Следователно и в двата случая секущата ℓ_h има гранично положение ℓ - допирателната към графиката на $f(x)$, но сега е перпендикулярна на оста Ox. Тъй като ℓ минава през точката $M_0(x_0, f(x_0))$, то сега нейното уравнение е $x = x_0$. Така показахме, че ако

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty \text{ или } -\infty,$$

то графиката на функцията $f(x)$ има вертикална допирателна $x = x_0$ в точката $M_0(x_0, f(x)0))$.

8.3. Определение на производна на функция.

Определение 4. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Изразът*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, x \in (a, b), x \neq x_0,$$

се нарича ***диференчно частно на*** $f(x)$ ***е точката*** x_0.

Ако съществува границата на диференчното частно при $x \to x_0$, тя се нарича ***производна на функцията*** $f(x)$ ***в точката*** x_0 ***и се бележи с*** $f'(x_0)$, *т.е. по определение*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

От направените по-горе разсъждения се вижда, че моментната скорост $v(t_0)$ съвпада с производната на закона на движение $s = s(t)$ в момента t_0, т.е. $v(t_0) = s'(t_0)$ (виж (2)).

Геометрично производната $f'(x_0)$, както се вижда от (5) и (6), може да се тълкува като ъгловия коефициент m на допирателната ℓ към графиката на функцията f в точката $M_0(x_0, f(x_0))$.

Да отбележим, че диференчното частно в определението на производната може да се запише по още няколко еквивалентни начина.

Ако означим $h = x - x_0$, се получава

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Понякога разликата $x - x_0$ се бележи с Δx и се нарича нарастване на аргумента, а разликата $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ се бележи с Δf и се нарича нарастване на функцията. Тогава за производната получаваме

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Теорема 1. *Ако функцията $f(x)$ има производна в точката x_0, то $f(x)$ е непрекъсната в x_0.*

Доказателство. Имаме

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0).0 = 0.$$

Следователно $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0)$, т.е. $f(x)$ е непрекъсната в x_0. □

Определение 5. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Казваме, че функцията f има в точката x_0 лява (съответно, дясна) производна, ако съществува границата*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left(\textit{съответно} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right).$$

От свойствата на едностранните граници веднага следва

Теорема 2. *Функцията $f(x)$ има производна в точката x_0 тогава и само тогава, когато $f(x)$ има лява и дясна производна в x_0 и те съвпадат.*

Тази теорема се използва когато се налага да се провери дали съществува производната в точката x_0 на фукция, която е зададена с различни формули отляво и отдясно на x_0.

Определение 6. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) и има производна във всяка точка $x \in (a, b)$. Съпоставяйки на всяко $x \in (a, b)$ производната $f'(x)$ получаваме функция, която се нарича* ***производна функция на*** *$f(x)$ или само* ***производна на*** *$f(x)$. Производната на функцията $f(x)$ се означава с $f'(x)$.*

Операцията, при която от функцията $f(x)$ се получава нейната производна $f'(x)$, се нарича ***диференциране****.*

8.4. Основни правила за диференциране.

Теорема 3. *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала (a,b) и имат производни $f'(x)$ и $g'(x)$ в (a,b). Тогава функциите $f(x) \pm g(x)$, $f(x).g(x)$ и, ако $g(x) \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ имат производна в интервала (a,b) и*

1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;

2) $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$;

3) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$.

Доказателство. 1) $(f(x) \pm g(x))' =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) \pm g(x+h)) - (f(x) \pm g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \pm (g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) \pm g'(x).$$

2) $(f(x).g(x))' =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h).g(x+h)) - (f(x).g(x))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x+h) + f(x).g(x+h) - f(x).g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

тъй като $g(x+h) \xrightarrow{h\to 0} g(x)$ съгласно Теорема 1.

3) Първо ще пресметнем производната на функцията $\dfrac{1}{g(x)}$.

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Сега можем да пресметнем производната на частното $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ като го представим като произведение на функциите $f(x)$ и $\dfrac{1}{g(x)}$.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$\frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}.$$

□

8.5. Производна на обратна функция.

Теорема 4. *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната и строго монотонна в интервала (a,b), $x_0 \in (a,b)$ и $f'(x_0) \neq 0$, то обратната функция $f^{-1}(y)$ има производна в точката $y_0 = f(x_0)$ и $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

Доказателство. Тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната и строго монотонна в интервала (a,b), то обратната функция $f^{-1}(y)$ е също строго монотонна и непрекъсната в интервала $V = f\left((a,b)\right)$. Поради тази причина е изпълнено, че:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x\to x_0}(y - y_0) = 0$;
2) $\lim\limits_{y\to y_0}(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) = \lim\limits_{y\to y_0}(x - x_0) = 0$.

Следователно

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} =$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

8.6. Производни на основните елементарни функции.

1) $(C)' = 0$, C-константа;

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$;

3) $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$;

4) $(e^x)' = e^x$;

5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}, a > 0, a \neq 1$;

6) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

7) $(\sin x)' = \cos x$;

8) $(\cos x)' = -\sin x$;

9) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

10) $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.