9. Диференцируемост на функция. Производни и диференциали от по-висок ред

9.1. Диференцируемост. Диференциал.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) и $x_0 \in (a, b)$.

Определение 1. *Казваме, че функцията $f(x)$ е **диференцируема** в точката x_0, ако нейното нарастване*

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \Delta x = x - x_0,$$

може да се представи във вида

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

където A е константа, а $\alpha(\Delta x)$ е функция, за която е изпълнено $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

*Линейната функция $A\Delta x$ се нарича **диференциал** на функцията $f(x)$ в точката x_0 и се означава с $df(x_0)$. Така се получават равенствата*

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

и

$$df(x_0) = A\Delta x.$$

За симетрия на записа нарастването на независимата променлива Δx е прието да се означава с dx, т.е. $dx \stackrel{def}{=} \Delta x$. Следователно можем да запишем

$$df(x_0) = Adx.$$

Теорема 1. *Функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 тогава и само тогава, когато $f(x)$ има в x_0 крайна производна.*

Доказателство. 1) Нека функцията $f(x)$ има в x_0 крайна производна $f'(x_0)$. Това означава, че съществува крайната граница

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Следователно имаме, че

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0.$$

Да дефинираме функция $\alpha(\Delta x)$ по следния начин:

$$\alpha(\Delta x) = \begin{cases} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) & \text{при } \Delta x \neq 0 \\ 0 & \text{при } \Delta x = 0 \end{cases}$$

Вече ни е известно, че $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. От дефиницията на функцията $\alpha(\Delta x)$ се получава равенството

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Така получихме представянето

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, A = f'(x_0), \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0,$$

т.е. функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0.

2) Нека сега функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0, т.е.

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, A \in \mathbb{R}, \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Тогава е изпълнено, че

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$$

Това означава, че съществува крайната производна $f'(x_0)$ (и по-точно, $f'(x_0) = A$). □

Забележка От доказателството на теоремата става ясно, че диференциалът на функцията $f(x)$ в точката x_0 може да се запише във вида

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

а производната - във вида

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Определение 2. *Казваме, че функцията $f(x)$ е **диференцируема** в интервала (a, b), ако тя е диференцируема във всяка точка $x \in (a, b)$*

Теорема 2. *Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в интервала (a, b), то тя е непрекъсната в интервала (a, b).*

Доказателство. Нека x_0 е произволна точка от интервала (a, b). Тъй като $f(x)$ е диференцируема в точката x_0, то съществува крайната производна $f'(x_0)$. Тогава от доказана в предходния въпрос теорема следва, че функцията $f(x)$ е непрекъсната в x_0. □

9.2. Производна на сложна функция.

Теорема 3. *Нека функциите $f(x) : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ и $g(y) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ са диференцируеми в дефиниционните си интервали. Тогава сложната функция $h(x) = g(f(x))$ е диференцируема в интервала (a, b) и*

$$h'(x) = g'(f(x)).f'(x).$$

Доказателство. Да фиксираме произволна точка $x_0 \in (a, b)$ и нека $y_0 = f(x_0)$. Тогава

$\Delta x = x - x_0$,

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) = y - y_0 = \Delta y$,

$\Delta g(y_0) = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g(f(x_0) + \Delta f(x_0)) - g(f(x_0))$,

$\Delta h(x_0) = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g(f(x_0) + \Delta f(x_0)) - g(f(x_0)) = \Delta g(y_0)$.

Тъй като функцията $g(x)$ е диференцируема в точката y_0, имаме

$$\Delta g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y,$$

като за функцията $\varepsilon(\Delta y)$ е изпълнено, че $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$.

Разделяйки на Δx двете страни на горното равенство получаваме

$$\frac{\Delta g(y_0)}{\Delta x} = g'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

или, записано по друг начин,

$$\frac{\Delta h(x_0)}{\Delta x} = g'(f(x_0))\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0.$$

След граничен преход $\Delta x \to 0$ получаваме

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(g'(f(x_0))\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y)\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right) = \\
&= g'(f(x_0)) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \\
&= g'(f(x_0)) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \\
&= g'(f(x_0))f'(x_0) + 0.f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).
\end{aligned}$$

Следователно сложната функция $h(x)$ има производна в точката x_0 и по-точно

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

□

9.3. Производни от по-висок ред.

Нека функцията $f(x)$ има производна $f'(x)$ във всички точки на интервала (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Ако функцията $f'(x)$ на свой ред има в точката x_0 производна $(f')'(x_0)$, то тя се нарича **втора производна на функцията $f(x)$ в точката** x_0 и се означава с $f''(x_0)$.

Ако втората производна $f''(x_0)$ на $f(x)$ съществува и е крайна за всяко $x_0 \in (a, b)$, то получаваме нова функция, съпоставяща на всяко $x_0 \in (a, b)$ числото $f''(x_0)$. Тази функция също се нарича втора производна на $f(x)$ и се бележи с $f''(x)$. Получава се, че $f''(x) = (f'(x))'$ за всяко $x \in (a, b)$.

По същата схема може да бъде дефинирана трета, четвърта и т.н. производна на функцията $f(x)$.

В общия случай, нека функцията $f(x)$ има $(n-1)$-ва производна $f^{(n-1)}(x)$ във всички точки на интервала (a,b) и $x_0 \in (a,b)$. Ако функцията $f^{(n-1)}(x)$ на свой ред има в точката x_0 производна $(f^{(n-1)})'(x_0)$, то тя се нарича **n-та производна на функцията $f(x)$ в точката x_0** и се означава с $f^{(n)}(x_0)$.

Ако n-тата производна $f^{(n)}(x_0)$ на $f(x)$ съществува и е крайна за всяко $x_0 \in (a,b)$, то получаваме нова функция, съпоставяща на всяко $x_0 \in (a,b)$ числото $f^{(n)}(x_0)$. Тази функция също се нарича n-та производна на $f(x)$ и се бележи с $f^{(n)}(x)$. Получава се, че $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ за всяко $x \in (a,b)$.

Пример 1. Ще пресметнем $f^{(n)}(x)$ на функцията $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$.

$$\begin{array}{lcccl} f'(x) & = & (a^x)' & = & a^x \ln a \\ f''(x) & = & (a^x \ln a)' & = & a^x (\ln a)^2 \\ f'''(x) & = & (a^x (\ln a)^2)' & = & a^x (\ln a)^3 \\ \vdots & & & & \\ f^{(n)}(x) & = & (a^x (\ln a)^{(n-1)})' & = & a^x (\ln a)^n \end{array}$$

Пример 2. Ще пресметнем $f^{(n)}(x)$ на функцията $f(x) = \sin x$.

$$\begin{array}{lcccccl} f'(x) & = & (\sin x)' & = & \cos x & = & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ f''(x) & = & (\cos x)' & = & -\sin x & = & \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \\ f'''(x) & = & (-\sin x)' & = & -\cos x & = & \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \\ f^{(4)}(x) & = & (-\cos x)' & = & \sin x & = & \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) \\ \vdots & & & & & & \\ f^{(n)}(x) & & & & & = & \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \end{array}$$

9.4. Диференциали от по-висок ред.

Диференциал от диференциала от първи ред $df(x) = f'(x)dx$ на функцията $f(x)$, разглеждан само като функция на променливото x (т.е. нарастването dx на аргумента x се счита за константа), при условие, че повторното нарастване на независимата променлива x съвпада с първоначалното, се нарича втори диференциал $d^2f(x)$ на функцията $f(x)$ в дадената точка x. По този начин,

$$d^2f(x) \stackrel{def}{=} d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dxdx.$$

Прието е вместо $dxdx$ да се записва dx^2, т.е.

$$d^2f(x) = f''(x)dx^2.$$

Аналогично, диференциал от n-ти ред ($n \in \mathbb{N}$) се нарича диференциал от диференциала от $(n-1)$-ви ред, при условие, че в диференциалите през цялото време се вземат едни и същи нараствания dx на независимата променлива x:

$$d^nf(x) \stackrel{def}{=} d(d^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n.$$