12. Формула на Тейлър

Целта ни в този въпрос ще бъде следната: за дадена функция $f(x)$, диференцируема достатъчен брой пъти в точка x_0, вътрешна за дефиниционната й област, да се намери полином от степен n, който "приближава добре" функцията $f(x)$ в малка околност на точката x_0.

12.1. Формула на Тейлър за полиноми.

Ще разгледаме първо случая, когато дадената функция е полином от ред n, т.е. има вида

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Като диференцираме последователно n пъти функцията $p(x)$, получаваме:

$$\begin{aligned}
p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} \\
p''(x) &= 1.2a_2 + 2.3a_3 x + \ldots + (n-1)na_n x^{n-2} \\
p'''(x) &= 1.2.3a_3 + 2.3.4a_4 x + \ldots + (n-2)(n-1)na_n x^{n-3} \\
&\vdots \\
p^{(n)}(x) &= 1.2.3\ldots na_n
\end{aligned}$$

Полагайки във всички равенства $x = 0$ получаваме, че

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots n$$

(където, както обикновено, полагаме $p^{(0)}(x) = p(x)$ и $0! = 1$).

Следователно можем да запишем полинома $p(x)$ във вида

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{1}$$

Да фиксираме реално число x_0. Да положим $y = x - x_0$ и да разгледаме помощния полином $q(y) = p(y + x_0)$. Нека полиномът $q(y)$ да има вида

$$q(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots + b_n y^n.$$

Като използваме получените по-горе формули получаваме за коефициентите b_k равенствата

$$b_k = \frac{q^{(k)}(0)}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Лесно се доказва (по индукция), че за всяко $k \in \mathbb{N}$ е изпълнено равенството

$$q^{(k)}(y) = p^{(k)}(y + x_0),$$

откъдето получаваме

$$b_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots n.$$

Нека сега в представянето на $q(y)$ заместим коефициентите b_k с техните равни и променливата y с $x - x_0$. Като вземем пред вид, че $q(x - x_0) = p(x)$, получаваме

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{2}$$

или, в развит вид,

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Получената формула се нарича **формула на Тейлър за полиноми**. Формулата (1) представлява неин частен случай при $x_0 = 0$ и се нарича **формула на Маклорен за полиноми**.

12.2. Формула на Тейлър за n-кратно диференцируема функция. Ред на Тейлър.

Нека функцията $f(x)$ е n-кратно диференцируема в точката x_0 от дефиниционната се област. Това означава, че x_0 е вътрешна точка за дефиниционната област, производните на функцията $f(x)$ до ред $(n-1)$ включително съществуват в околност на x_0, а $(n-1)$-вата производна на $f(x)$ е диференцируема в точката x_0. Тогава по аналогия с формулата на Тейлър за полиноми разглеждаме полинома

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

$T_n(x)$ се нарича **полином на Тейлър** за функцията $f(x)$ в точката x_0.

Лесно се вижда, че ако функцията $f(x)$ има в точката x_0 производни от произволен ред, то полиномите на Тейлър могат да бъдат разглеждани като частични суми на безкрайния ред

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

който се нарича **ред на Тейлър** на функцията $f(x)$ около точката x_0. Ще отбележим, че е възможно този ред да бъде разходящ (т.е. сумата му да не съществува или да бъде ∞).

Лема 1. *Полиномът $T_n(x)$ е единственият полином от степен n, чиито производни в точката x_0 до ред n включително съвпадат със съответните производни на функцията $f(x)$ в тази точка.*

Доказателство. Равенствата $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ се проверяват като диференцираме $T_n(x)$ последователно k пъти и положим в получените равенства $x = x_0$. От друга страна, ако $p_n(x)$ е полином от степен n, за който са изпълнени равенствата $p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, то, прилагайки за него формулата на Тейлър за полиноми (2), ще получим, че съвпада с $T_n(x)$. □

За да се оцени колко се различават стойностите на полиномите на Тейлър в дадена точка x от стойността на функцията в същата точка, се въвежда величината

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x),$$

наречена **остатъчен член**. Тогава можем да напишем формулата

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x),$$

наричана обикновено **формула на Тейлър**. Очевидно остатъчният член $R_n(x)$ представлява грешката във формулата $f(x) \approx T_n(x)$. Ето защо е необходимо да се изведе израз или да се направи оценка на остатъчния член $R_n(x)$.

12.3. Формула на Тейлър с остатъчен член във формата на Пеано.

Нека $f(x)$ е функция, притежаваща производни до ред n включително в точката x_0. Тогава за остатъчния член е в сила оценката

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n),$$

откъдето формулата на Тейлър добива вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

За дадена функция $h(x)$ равенството $h(x) = o((x - x_0)^n)$ означава, че

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Първо ще докажем следната

Лема 2. *Нека $h(x)$ е функция, диференцируема n пъти в точката x_0 и удовлетворяваща равенствата*

$$h(x_0) = h'(x_0) = h''(x_0) = \ldots = h^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогава $h(x) = o((x - x_0)^n)$.

Доказателство. Ще докажем лемата чрез индукция.

При $n = 1$ се проверява непосредствено, че ако $h(x_0) = h'(x_0) = 0$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{(x - x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{(x - x_0)} = h'(x_0) = 0.$$

Да допуснем, че твърдението на лемата е вярно за дадено естествено число n. Ще докажем, че твърдението е вярно и за $n + 1$. Нека

$$h(x_0) = h'(x_0) = h''(x_0) = \ldots = h^{(n)}(x_0) = h^{(n+1)}(x_0) = 0.$$

Това означава, че функцията $h'(x)$ се анулира в точката x_0 заедно с производните си до ред n включително, и следователно, според индуктивното предположение, имаме

$$h'(x) = o((x - x_0)^n). \tag{3}$$

По теоремата на Лагранж съществува точка ξ между x и x_0 такава, че

$$h(x) = h(x) - h(x_0) = h'(\xi)(x - x_0).$$

Оттук за точки x, които са близки до x_0 и не съвпадат с x_0, имаме

$$\left|\frac{h(x)}{(x - x_0)^{n+1}}\right| = \left|\frac{h'(\xi)}{(x - x_0)^n}\right| \le \left|\frac{h'(\xi)}{(\xi - x_0)^n}\right|. \tag{4}$$

При $x \to x_0$ е изпълнено, че $\xi \to x_0$, тъй като точката ξ е между x и x_0. Тогава според (3)

$$\lim_{\xi\to x_0} \frac{h'(\xi)}{(\xi - x_0)^n} = 0.$$

Сега от неравенствата (4) следва

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0,$$

т.е. $h(x) = o((x - x_0)^{n+1})$. Лемата е доказана. □

Да се върнем към доказателството на формулата на Пеано за остатъчния член. От Лема 1 следва, че функцията $R_n(x)$ се анулира в точката x_0 заедно с производните си до ред n включително, откъдето по Лема 2 имаме $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$.

12.4. Формули на Лагранж и Коши за остатъчния член.

Оценката на Пеано за остатъчния член ни дава информация за поведението на остатъчния член при $x \to x_0$. В много случаи обаче е важно да оценим отгоре $|R_n(x)|$ за фиксирана стойност на x. За тази цел се използват формулите на Лагранж и Коши, които ще докажем тук.

Нека да предположим, че функцията $f(x)$ притежава производни до $(n + 1)$-ви ред включително в околност на точката x_0. Да отбележим, че това изискване е значително по-силно от направеното за доказателството на формулата на Пеано. Да фиксираме точка x от тази околност и да разгледаме в затворения интервал, определен от точките x_0 и x, помощната функция

$$\varphi(t) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k\right) =$$

$$= f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Вижда се, че горната формула наподобява израза за $R_n(x)$, в който константата x_0 е заместена с променливата t. Оттук получаваме

$$\varphi(x_0) = R_n(x) \text{ и } \varphi(x) = 0.$$

Диференцирайки функцията $\varphi(t)$, имаме

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) \quad = \quad -f'(t) \quad & - \quad \left(\tfrac{f''(t)}{1!}(x-t) - f'(t)\right) \\
& - \quad \left(\tfrac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \tfrac{f''(t)}{1!}(x-t)\right) \\
& - \quad \left(\tfrac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 - \tfrac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right) \\
& \vdots \\
& - \quad \left(\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \tfrac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

След като унищожим всички двойки събираеми с противоположни знаци, получаваме

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}.$$

Да положим $\psi(t) = (x-t)^p$, където p е естествено число, което ще изберем по-късно. За функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ ще приложим теоремата на Коши за интервала $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$, в зависимост от положението на x спрямо x_0). Виждаме, че в интервала (x_0, x) (или, съответно, (x, x_0)) съществува точка ξ, за която е изпълнено

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

откъдето, използвайки стойностите за $\varphi(x_0)$ и $\varphi(x)$ и израза за $\varphi'(t)$, намерени по-горе, получаваме

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n . \frac{\psi(x_0) - \psi(x)}{\psi'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-\xi)^{n+1-p}(x-x_0)^p.$$

Тази обща формула за остатъчния член се нарича **форма на Шлемилх и Рош**. Тя може да бъде записана и по друг начин. Да изначим

$$\theta = \frac{\xi - x_0}{x - x_0}.$$

Очевидно $\theta \in (0,1)$. Имаме

$$\xi = x_0 + \theta(x - x_0), x - \xi = (1-\theta)(x - x_0)$$

и формулата добива вида

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}.$$

Обикновено се използват два частни случая на горната формула, които ще отбележим специално. При $p = n+1$ получаваме

Формула на Лагранж за остатъчния член. *Нека функцията $f(x)$ притежава производни до ред $(n+1)$ включително в околност на точката x_0 и x е точка от тази околност. Тогава в интервала (x_0, x) (или (x, x_0)) съществува точка ξ, за която е в сила равенството*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Това е най-често употребяваната форма на остатъчния член. При нея формулата на Тейлър добива вида

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Друга често употребявана форма на остатъчния член се получава при $p = 1$.

Формула на Коши за остатъчния член. *Нека функцията $f(x)$ притежава производни до ред $(n+1)$ включително в околност на точката x_0 и x е точка от тази околност. Тогава съществува $\theta \in (0,1)$ такава, че*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.$$