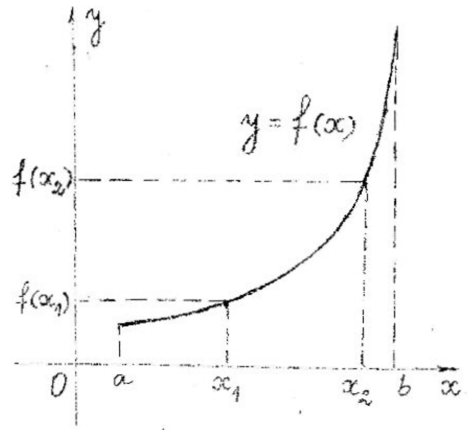
13. Монотонност и локален екстремум на функция

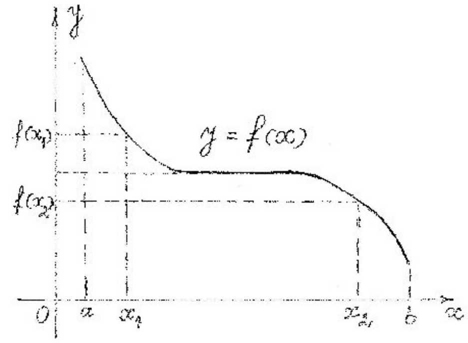
13.1. Монотонност на функция. Критерий за монотонност.

Първо ще припомним определенията на монотонно растяща и монотонно намаляваща функция.

Определение 1. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b). Функцията $f(x)$ се нарича* ***монотонно растяща*** *в интервала (a, b), ако за всеки две стойности $x_1, x_2 \in D_f$, за които $x_1 < x_2$, е изпълнено $f(x_1) \leq f(x_2)$, т.е. стойностите на $f(x)$ нарастват с нарастването на аргумента x. Ако е изпълнено строгото неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, функцията се нарича* ***строго монотонно растяща****.*



Определение 2. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b). Функцията $f(x)$ се нарича* ***монотонно намаляваща*** *в интервала (a, b), ако за всеки две стойности $x_1, x_2 \in D_f$, за които $x_1 < x_2$, е изпълнено $f(x_1) \geq f(x_2)$, т.е. стойностите на $f(x)$ намаляват с нарастването на аргумента x. Ако е изпълнено строгото неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, функцията се нарича* ***строго монотонно намаляваща****.*



Монотонно растящите и монотонно намаляващите функции се наричат **монотонни функции**.

Ако функцията е диференцируема в даден отворен интервал, то съществува зависимост между вида на монотонността на функцията и знака на първата производна. Вече доказахме следващата теорема като следствие от теоремата на Лагранж:

Теорема 1 (Критерий за монотонност). *Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в отворения интервал (a, b), то тя е монотонно растяща (монотонно намаляваща) в (a, b) тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) за всяко $x \in (a, b)$.*

13.2. Локален екстремум на функция.

При изследване на поведението на функциите възниква задачата за намиране на най-голямата или най-малката стойност на дадена функция. Във връзка с това ще припомним въведеното по-рано понятие **локален екстремум**.

Определение 3. *Казваме, че функцията $f(x)$ има локален максимум (локален минимум) в точката $x_0 \in D_f$, ако съществува такава околност $U(x_0)$ на точката x_0, $U(x_0) \subset D_f$, че за всяко $x \in U(x_0)$ да бъде изпълнено неравенството $f(x) \leq f(x_0)$ (съответно $f(x) \geq f(x_0)$). Функционалната стойност $f(x_0)$ се нарича локален максимум (локален минимум).*

Казваме, че функцията $f(x)$ има локален екстремум в точката $x_0 \in D_f$, ако $f(x)$ има локален максимум или локален минимум в тази точка.

13.3. Необходими условия за локален екстремум.

Необходимо условие за съществуването на локален екстремум на диференцируема функция се дава от разгледаната по-рано теорема на Ферма.

Теорема 2 (на Ферма). *Ако функцията $f(x)$ има в точката x_0 локален екстремум и е диференцируема в x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

Точките от дефиниционната област на дадена функция $f(x)$, в които е изпълнено равенството $f'(x) = 0$, се наричат **стационарни точки** за $f(x)$.

Забележка. Лесно се вижда, че условието в теоремата на Ферма не е достатъчно за съществуването на локален екстремум. Например производната на функцията $f(x) = x^3$ се анулира в точката $x_0 = 0$, но функцията няма локален екстремум в тази точка.

От друга страна, възможно е една функция да не е диференцируема в дадена точка, но да има в същата точка локален екстремум. Пример за това е $f(x) = |x|$ в точката $x_0 = 0$.

Условието в теоремата на Ферма ни дава възможност да формулиране едно просто правило за намиране на максимална и минимална стойност на диференцируема функция в краен затворен интервал:

Правило. *Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в крайния затворен интервал $[a, b]$. Да пресметнем стойностите на $f(x)$ във всички точки, за които е изпълнено равенството $f'(x) = 0$ (т.е., във всички стационарни точки) и в крайните точки на интервала a и b. Тогава най-голямата от получените стойности е максималната стойност на $f(x)$ в интервала $[a, b]$, а най-малката - минималната.*

13.4. Достатъчни условия за локален екстремум.

Определение 4. *Казваме, че функцията $f(x)$* ***мени знака си от плюс към минус*** *в точката x_0, ако съществува такава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на x_0, че за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ да бъде изпълнено неравенството $f(x) \geq 0$, а за всяко $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ - неравенството $f(x) \leq 0$.*

Казваме, че функцията $f(x)$ ***мени знака си от минус към плюс*** *в точката x_0, ако съществува такава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на x_0, че за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ да бъде изпълнено неравенството $f(x) \leq 0$, а за всяко $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ - неравенството $f(x) \geq 0$.*

Теорема 3 (Достатъчно условие I)**.** *Нека в околност на точката x_0 функцията $f(x)$ има производна, която се анулира в x_0. Тогава:*

1) ако $f'(x)$ сменя в x_0 знака си от плюс към минус, то $f(x)$ има в x_0 локален максимум;

2) ако $f'(x)$ сменя в x_0 знака си от минус към плюс, то $f(x)$ има в x_0 локален минимум;

3) ако $f'(x)$ запазва знака си в околност на точката x_0 и не се анулира тъждествено в никоя едностранна околност на тази точка, то $f(x)$ няма локален екстремум в x_0.

Доказателство. 1) Тъй като за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ е изпълнено $f'(x) \geq 0$, то $f(x)$ е монотонно растяща в $(x_0 - \delta, x_0]$ и следователно $f(x) \leq f(x_0)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0]$.

Аналогично, тъй като за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ е изпълнено $f'(x) \leq 0$, то $f(x)$ е монотонно намаляваща в $[x_0, x_0 + \delta)$ и следователно отново $f(x) \leq f(x_0)$ за всяко $x \in [x_0, x_0 + \delta)$.

Така получихме, че $f(x) \leq f(x_0)$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, т.е. $f(x)$ има в точката x_0 локален максимум.

2) доказва се аналогично на 1).

3) Нека $f'(x)$ не сменя знака си в околност на точката x_0 и е например неотрицателна, т.е. изпълнено е $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогава от Критерия за монотонност следва, че функцията $f(x)$ е монотонно растяща в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Да предположим, че $f'(x)$ не се анулира тъждествено в нито един интервал от вида $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ или $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ $(\delta > \varepsilon > 0)$. Това означава, че $f(x)$ не е тъждествено равна на константа в нито един интервал от вида $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ или $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Следователно за всяко $\varepsilon \in (0, \delta)$ съществуват точки $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ такива, че $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Казано по друг начин, не съществува околност $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, в която да е изпълнено някое от неравенствата $f(x) \leq f(x_0)$ или $f(x) \geq f(x_0)$. Получихме, че $f(x)$ няма локален екстремум в x_0.

□

Теорема 4 (Достатъчно условие II). *Нека функцията $f(x)$ има първа производна в околност на точката x_0 и втора производна в самата точка x_0. Тогава:*

1) ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то в точката x_0 функцията $f(x)$ има локален минимум;

2) ако $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то в точката x_0 функцията $f(x)$ има локален максимум.

Доказателство. Ще докажем първото твърдение (второто се доказва аналогично). Тъй като $f''(x_0) > 0$ и по дефиниция $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$, то съществува околност $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, за която е изпълнено

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0 \text{ за всяко } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Тогава при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ $(x < x_0)$ ще имаме $f'(x) < f'(x_0) = 0$, а при $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ $(x > x_0)$ ще имаме $f'(x) > f'(x_0) = 0$. Следователно $f'(x)$ мени знака си от минус към плюс в точката x_0. От Достатъчно условие I сега получаваме, че функцията $f(x)$ има в точката x_0 локален минимум. □