14. Изпъкнали и вдлъбнати функции. Инфлексни точки

14.1. Определения.

Определение 1. *Функцията $f(x)$ се нарича* ***изпъкнала*** *в интервала (a,b), ако за всеки две точки $x_1, x_2 \in (a,b)$ и за всеки две числа $p_1, p_2 \in (0,1)$ такива, че $p_1 + p_2 = 1$, е изпълнено неравенството*

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2). \tag{1}$$

Ако е изпълнено строго неравенство, ще казваме, че $f(x)$ е ***строго изпъкнала****.*

Ако $p_1, p_2 \in [0,1]$ и са такива, че $p_1 + p_2 = 1$, то една точка x може да се представи във вида $x = p_1x_1 + p_2x_2$ тогава и само тогава, когато $x \in [x_1, x_2]$ (за улеснение считаме, че $x_1 < x_2$). Коефициентите p_1 и p_2 се определят чрез формулите

$$p_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, p_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Следователно можем да запишем условието за изпъкналост (1) във вида:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \text{ за всяко } x \in (x_1, x_2). \tag{2}$$

Определение 2. *Функцията $f(x)$ се нарича* ***вдлъбната*** *в интервала (a,b), ако за всеки две точки $x_1, x_2 \in (a,b)$ и за всеки две числа $p_1, p_2 \in (0,1)$ такива, че $p_1 + p_2 = 1$, е изпълнено неравенството*

$$f(p_1x_1 + p_2x_2) \geq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2).$$

Ако е изпълнено строго неравенство, ще казваме, че $f(x)$ е ***строго вдлъбната****.*

От определенията може да се направи извода че функцията $f(x)$ е изпъкнала тогава и само тогава, когато $-f(x)$ е вдлъбната.

14.2. Геометрична характеризация на изпъкналите и вдлъбнатите функции.

Да разгледаме точките $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$, лежащи върху графиката на функцията $f(x)$. Отсечката, която свързва тези две точки, се нарича **хорда** за тази графика. Уравнението на правата $y = l(x)$, минаваща през точките A и B, има вида:

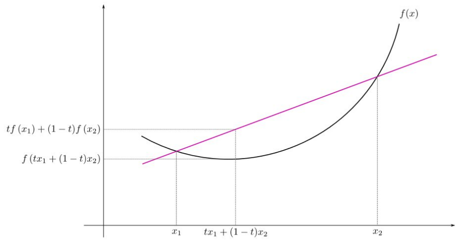
$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

След като изразим y получаваме

$$y = l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \tag{3}$$

Тогава можем да запишем втората форма на условието за изпъкналост (2) във вида $f(x) \leq l(x)$ за всяко $x \in (x_1, x_2)$. С други думи, доказахме следното твърдение:

Една функция е изпъкнала тогава и сано тогава, когато частта от графика й между двата края на произволна хорда се намира под хордата.



На чертежа с t е означено числото p_1, а $1 - t = p_2$.

По аналогия се получава и твърдението:

Една функция е вдлъбната тогава и само тогава, когато частта от графика й между двата края на произволна хорда се намира над хордата.

Забележка. Може да се докаже, че ако $f(x)$ е изпъкнала функция и $x \notin [x_1, x_2]$, то е изпълнено обратното неравенство $f(x) \geq l(x)$, където, както по-горе, $y = l(x)$ е уравнението на хордата, минаваща през точките $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$ от графиката на $f(x)$. Наистина, нека например $x < x_1$. Да допуснем, че $f(x) < l(x)$. Тъй като $x_1 \in [x, x_2]$, то съществуват числа $q_1, q_2 \in (0, 1), q_1 + q_2 = 1$, такива, че $x_1 = q_1 x + q_2 x_2$. Тъй като $l(x)$ е линейна функция и $l(x_1) = f(x_1), l(x_2) = f(x_2)$, получаваме

$$f(x_1) \leq q_1 f(x) + q_2 f(x_2) < q_1 l(x) + q_2 l(x_2) = l(x_1),$$

т.е. противоречие.

Теорема 1. *Всяка изпъкнала функция, дефинирана в отворен интервал, е непрекъсната.*

Доказателство. Нека изпъкналата функция $f(x)$ е дефинирана в интервала (a, b) и x_0 е произволна точка от този интервал. Нека $x_1, x_2 \in (a, b)$ са такива точки, че $x_1 < x_0 < x_2$. Да означим с $y = l_1(x)$ уравнението на хордата през точките $A(x_1, f(x_1))$ и $M(x_0, f(x_0))$, и с $y = l_2(x)$ - уравнението на хордата през точките $M(x_0, f(x_0))$ и $B(x_2, f(x_2))$.

Нека $x \in (x_1, x_0)$. Тогава $f(x) \leq l_1(x)$. От друга страна, тъй като $x \notin [x_0, x_2]$, от направената по-горе забележка следва, че $f(x) \geq l_2(x)$. Тъй като $l_1(x_0) = l_2(x_0) = f(x_0)$, то от неравенството

$$l_2(x) \leq f(x) \leq l_1(x)$$

и от Лемата за двамата полицаи следва, че

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0),$$

т.е. $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 отляво. Аналогично, ако вземем точка $x \in (x_0, x_2)$ ще получим неравенствата

$$l_1(x) \leq f(x) \leq l_2(x),$$

откъдето следва

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0),$$

т.е. $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и отдясно. $\square$

14.3. Критерий за изпъкналост на еднократно диференцируеми функции.

Теорема 2. *Диференцируемата функция $f(x)$ е изпъкнала тогава и само тогава, когато нейната производна $f'(x)$ е монотонно растяща.*

Доказателство. Първо ще отбележим, че ако $p_1, p_2 \in (0,1)$, $p_1 + p_2 = 1$, и положим $x = p_1x_1 + p_2x_2$, то условието за изпълналост (1) може да бъде записано във вида

$$p_1(f(x_1) - f(x)) + p_2(f(x_2) - f(x)) \geq 0. \tag{4}$$

Използвайки изразите за p_1 и p_2, дадени по-горе, получаваме следната еквивалентна форма на това условие, което ще използваме при доказателството на теоремата:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \text{ за всяко } x \in (x_1, x_2). \tag{5}$$

Нека функцията $f(x)$ е изпъкнала и x_1 и x_2 са произволни точки от дефиниционната й област такива, че $x_1 < x_2$. От изпъкналостта следва, че $f(x)$ удовлетворява условието (5). Като направим в него граничен преход при $x \to x_1$, получаваме

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \tag{6}$$

а при $x \to x_2$ получаваме

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2). \tag{7}$$

От неравенствата (6) и (7) следва, че $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, т.е. $f'(x)$ е растяща функция.

Нека сега $f'(x)$ е растяща функция и x_1 и x_2 са произволни точки от дефиниционната област на $f(x)$ такива, че $x_1 < x_2$. Нека $x \in (x_1, x_2)$.

От теоремата на Лагранж, приложена за $f(x)$ и интервала $[x_1, x]$ следва, че съществува точка $\xi_1 \in (x_1, x)$ такава, че

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1). \tag{8}$$

Отново от теоремата на Лагранж, приложена за $f(x)$ и интервала $[x, x_2]$ следва, че съществува точка $\xi_2 \in (x, x_2)$ такава, че

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2). \tag{9}$$

Тъй като $\xi_1 < \xi_2$ и функцията $f'(x)$ е монотонно растяща, то $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$. От това неравенство и равенствата (8) и (9) следва, че $f(x)$ удовлетворява неравенството (5), т.е. $f(x)$ е изпъкнала функция. □

Знаем, че графиките на диференцируемите функции притежават във всяка своя точка допирателна (получена като гранично положение на секущата) и че ъгловият коефициент на допирателната е равен на производната в съответната точка. От това следва, че допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$ има уравнение

$$y = l_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{10}$$

Теорема 3. *Диференцируемата функция $f(x)$ е изпъкнала тогава и само тогава, когато графиката ѝ лежи над всяка своя допирателна, т.е. при всеки избор на точките x и x_0 е изпълнено*

$$f(x) \geq l_{x_0}(x).$$

Доказателство. Записано подробно, неравенството в условието на теоремата има вида

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{11}$$

След като разделим двете страни на $x - x_0$ получаваме, че то е равносилно на следните две неравенства:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \text{ при } x < x_0, \tag{12}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) \text{ при } x > x_0. \tag{13}$$

Нека $f(x)$ е изпъкнала функция. Тогава тя удовлетворява неравенството (5).

Ако $x < x_0$ и $t \in (x, x_0)$, неравенството (5), записано след замяна на x_1, x, x_2 съответно с x, t, x_0, изглежда така:

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(x_0) - f(t)}{x_0 - t} \text{ за всяко } t \in (x, x_0). \tag{14}$$

Като направим в (14) граничен преход при $t \to x_0$, получаваме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0)$$

Ако $x > x_0$ и $t \in (x_0, x)$, неравенството (5), записано след замяна на x_1, x, x_2 съответно с x_0, t, x, изглежда така:

$$\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \leq \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \text{ за всяко } t \in (x_0, x). \tag{15}$$

Като направим в (15) граничен преход при $t \to x_0$, получаваме

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0).$$

По този начин показахме, че функцията $f(x)$ удовлетворява неравенствата (12) и (13).

Обратно, нека функцията $f(x)$ удовлетворява неравенствата (12) или (13) за всеки две точки x и x_0 от дефиниционната ѝ област.

Да изберем произволни точки x_1 и x_2 от дефиниционната област такива, че $x_1 < x_2$. Да заместим в неравенството (12) x с x_1 и x_0 с x_2, а в неравенството (13) - x с x_2 и x_0 с x_1. Получаваме

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'(x_2), \tag{16}$$

т.е.

$$f'(x_1) \leq f'(x_2) \text{ винаги, когато } x_1 < x_2.$$

С други думи, функцията $f'(x)$ е монотонно растяща и следователно $f(x)$ е изпъкнала. □

14.4. Критерий за изпъкналост на двукратно диференцируеми функции.

Теорема 4. *Двукратно диференцируемата функция $f(x)$ е изпъкнала в интервала (a, b) тогава и само тогава, когато $f''(x) \geq 0$ за всяко $x \in (a, b)$.*

Доказателство. $f''(x) \geq 0$ за всяко $x \in (a, b)$ тогава и само тогава, когато функцията $f'(x)$ е монотонно растяща в (a, b).

От своя страна $f'(x)$ е монотонно растяща в (a, b) тогава и само тогава, когато функцията $f(x)$ е изпъкнала в (a, b). □

Забележка. От представените по-горе три критерия за изпъкналост на функция лесно могат да се изведат и съответни критерии за вдлъбнатост на функция:

Диференцируемата функция $f(x)$ е вдлъбната тогава и само тогава, когато нейната производна $f'(x)$ е монотонно намаляваща.

Двукратно диференцируемата функция $f(x)$ е вдлъбната в интервала (a, b) тогава и само тогава, когато $f''(x) \leq 0$ за всяко $x \in (a, b)$.

14.5. Инфлексни точки.

При изучаването на функциите е важно да се определят точките, в които функцията от изпъкнала става вдлъбната и обратно.

Определение 3. *Точката x_0 се нарича **инфлексна** за функцията $f(x)$, ако съществува интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, съдържащ се в дефиниционната ѝ област такъв, че в лявата му част $(x_0 - \delta, x_0)$ функцията $f(x)$ е изпъкнала, а в дясната* *част $(x_0, x_0+\delta)$ - вдлъбната, или обратно - в лявата част е вдлъбната, а в дясната - изпъкнала.*

Нека $f(x)$ е диференцируема функция. Тогава според доказаните по-горе критерии в интервала $(x_0-\delta, x_0)$ производната $f'(x)$ е монотонно растяща, а в интервала $(x_0, x_0+\delta)$ - монотонно намаляваща, или обратното. И в двата случая се получава следното необходимо условие за инфлексна точка:

Ако точката x_0 е инфлексна за диференцируемата функция $f(x)$, то производната $f'(x)$ има в тази точка локален екстремум.

За два пъти диференцируема функция $f(x)$ от теоремата на Ферма се получава:

Ако функцията $f(x)$ има втора производна в точката x_0 и x_0 е инфлексна точка за $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Сега ще дадем геометрична интерпретация на тези необходими условия. Нека x_0 е инфлексна точка за $f(x)$. Да допуснем за определеност, че в лявата част на интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ функцията е изпъкнала, а в дясната - вдлъбната. Тогава в интервала $(x_0-\delta, x_0]$ графиката на $f(x)$ се намира над всяка своя допирателна, и в частност - над допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$. Аналогично, в интервала $[x_0, x_0+\delta)$ графиката на $f(x)$ се намира под всяка своя допирателна, и в частност - под допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$. Получава се, че:

Нека точката x_0 е инфлексна за диференцируемата функция $f(x)$. Тогава в точката $(x_0, f(x_0))$ графиката на $f(x)$ пресича допирателната си.