16. Основни методи за интегриране. Интегриране на някои класове функции.

16.1. Интегриране по части.

Теорема 1 (Формула за интегриране по части). *Ако функциите* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са диференцируеми в интервала* (a, b) *и в този интервал съществува интегралът* $\displaystyle\int g(x)\,df(x)$*, то в същият интервал съществува и интеграла* $\displaystyle\int f(x)\,dg(x)$*, като при това е изпълнено равенството*

$$\int f(x)\,dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,df(x).$$

Доказателство. Чрез правилото за диференциране на произведение получаваме

$$d(f(x)g(x)) = (f(x)g(x))'dx = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx =$$

$$= f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx = g(x)df(x) + f(x)dg(x),$$

откъдето

$$f(x)dg(x) = d(f(x)g(x)) - g(x)df(x). \tag{1}$$

По условие имаме, че $\displaystyle\int g(x)\,df(x)$ съществува, а знаем, че

$$\int d(f(x)g(x)) = f(x)g(x) + C \tag{2}$$

според едно от свойствата на неопределения интеграл. Следователно тъй като двата интеграла в дясната част на равенството (1) съществуват, ще съществува и интегралът $\displaystyle\int f(x)\,dg(x)$ в лявата му част и при това е изпълнено равенството

$$\int f(x)dg(x) = \int d(f(x)g(x)) - \int g(x)df(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x),$$

като считаме, че произволната константа C от равенството (2) е прибавена към интеграла $\displaystyle\int g(x)df(x)$.

□

16.2. Интегриране чрез смяна на променливата.

Теорема 2. *Нека функцията* $f(x)$ *е дефинирана в интервала* (a, b)*, а функцията* $\varphi(t)$ *- в интервала* (α, β)*, като* $\varphi(t) \in (a, b)$ *за всяко* $t \in (\alpha, \beta)$*. Ако* $F(x)$ *е примитивна на* $f(x)$ *в интервала* (a, b) *и, следователно,*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

а функцията $\varphi(t)$ е диференцируема в интервала (α, β), то функцията $F(\varphi(t))$ е примитивна за $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ в интервала (α, β) и

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx|_{\text{при } x=\varphi(t)}. \tag{3}$$

Иначе казано, ако първо направим смяна на променливата $x = \varphi(t)$ в интеграла и след това го пресметнем, или ако първо пресметнем интеграла и след това направим смяната на променливата, резултатът ще е един и същ.

Доказателство. Тъй като $F'(x) = f(x)$ за $x \in (a, b)$, по правилото за диференциране на сложна функция получаваме $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), t \in (\alpha, \beta)$. С това доказахме, че $F(\varphi(t))$ е примитивна функция на $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ в интервала (α, β). Оттук имаме

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C_1.$$

От друга страна

$$\int f(x)\,dx|_{\text{при } x=\varphi(t)} = (F(x) + C)|_{\text{при } x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C.$$

Тъй като C и C_1 са произволни константи, то десните страни на получените две равенства съвпадат. Следователно съвпадат и левите страни, т.е.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx|_{\text{при } x=\varphi(t)}.$$

$\square$

Понякога е по-лесно да се пресметне интегралът $\displaystyle\int f(x)\,dx$ след като в него се направи определена смяна на променливата $t = \varphi(t)$. Така даденият интеграл се свежда до пресмятането на интеграла $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

В случая, когато функцията $\varphi(t)$ има обратна функция $\varphi^{-1}(x)$, то, преминавайки в двете страни на равенството (3) към променлива x чрез смяната $t = \varphi^{-1}(x)$ и разменяйки местата на двете страни получаваме

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt|_{\text{при } t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Тази формула обикновено се нарича *формула за интегриране чрез смяна на променливата.*

16.3. Интегриране на рационални функции.

Да припомним, че функция от вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n, a_0 \neq 0,$$

се нарича полином от степен n с коефициенти $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$.

Определение 1. ***Рационална функция*** *наричаме функция от вида*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_k(x)},$$

където $P_n(x)$ и $Q_k(x)$ са полиноми.

Функцията $R(x)$ е дефинирана за всяко x, за което $Q_k(x) \neq 0$

Определение 2. *Рационалната функция $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_k(x)}$ се нарича* ***правилна****, ако степента на полинома $P_n(x)$ е по-малка от степента на полинома $Q_k(x)$, т.е. $n < k$.*

Като използваме правилото за делене на полиноми, можем да представим всяка рационална функция като сума на полином и правилна рационална функция.

Пример. Нека $R(x) = \dfrac{x^3+5}{2x^2-x-1}$. Тогава

$$\begin{array}{l}
\left(x^3+5\right) : \left(2x^2-x-1\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\
- \\
\quad x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \\
\quad \overline{\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 5 \\
\quad - \\
\qquad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \\
\qquad \overline{\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\quad \frac{3}{4}x + \frac{21}{4}
\end{array}$$

т.е. получихме, че

$$\frac{x^3+5}{2x^2-x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{4}x + \frac{21}{4}}{2x^2-x-1}.$$

Неопределеният интеграл на всяка рационална функция може да бъде пресметнат. За целта първо рационалната функция се представя като сума на полином и правилна рационална функция, а след това получената правилна рационална функция се представя като сума на прости рационални функции (наречени елементарни дроби), които се интегрират лесно.

Определение 3. *Рационалните функции от вида*

$$\frac{A}{(x-x_0)^m}, A = const, x_0 \in \mathbb{R}, m = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

се наричат ***елементарни дроби от първи вид****, свързани с x_0.*

Рационалните функции от вида

$$\text{(5)} \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, M, N = const, p, q \in \mathbb{R}, p^2-4q<0, m=1,2,\ldots,$$

се наричат ***елементарни дроби от втори вид****, свързани с* p *и* q*.*

Ако $Q_k(x)$ е полином с реални коефициенти, то той се представя еднозначно с точност до разместване на множителите във вида

$$Q_k(x) = b_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_s)^{\alpha_s}\times$$
$$\times(x-z_1)^{\beta_1}(x-\overline{z_1})^{\beta_1}(x-z_2)^{\beta_2}(x-\overline{z_2})^{\beta_2}\ldots(x-z_t)^{\beta_t}(x-\overline{z_t})^{\beta_t},$$

където b_0 е коефициентът пред най-високата степен на x, $x_1, x_2, \ldots, x_s$ са реалните корени на $Q_k(x)$, съответно с кратности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, $z_1, z_2, \ldots, z_t$ са комплексните корени на $Q_k(x)$, съответно с кратности $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t$. След като умножим $(x-z_1)$ с $(x-\overline{z_1})$, $(x-z_2)$ с $(x-\overline{z_2})$, ..., $(x-z_t)$ с $(x-\overline{z_t})$ получаваме

$$Q_k(x) = b_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_s)^{\alpha_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}\ldots(x^2+p_tx+q_t)^{\beta_t},$$

където $p_j = -(z_j+\overline{z_j})$, $q_j = z_j\overline{z_j}$, $j=1,2,\ldots,t$. Полученото представяне на $Q_k(x)$ съдържа само множители с реални коефициенти, които са взаим прости и са неразложими над полето на реалните числа.

Представянето на правилна рационална функция като сума на елементарни дроби се основава на следната

Теорема 3. *Нека* $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_k(x)}$ *е правилна рационална функция и*

$$Q_k(x) = b_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_s)^{\alpha_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}\ldots(x^2+p_tx+q_t)^{\beta_t}$$

е представянето на $Q_k(x)$ *като прозиведение на взаимно прости,неразложими над полето на реалните числа множители.Тогава съществуват единствени константи*

$$A_{11}, A_{12}, \ldots A_{1\alpha_1}; A_{21}, A_{22}, \ldots A_{2\alpha_2}; \ldots, A_{s1}, A_{s2}, \ldots A_{s\alpha_s};$$

$$M_{11}, M_{12}, \ldots M_{1\beta_1}; M_{21}, M_{22}, \ldots M_{2\beta_2}; \ldots, M_{t1}, M_{t2}, \ldots M_{t\beta_t};$$

$$N_{11}, N_{12}, \ldots N_{1\beta_1}; N_{21}, N_{22}, \ldots N_{2\beta_2}; \ldots, N_{t1}, N_{t2}, \ldots N_{t\beta_t},$$

удовлетворяващи равенството

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_k(x)} &= \frac{A_{11}}{(x-x_1)} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} \\
&+ \frac{A_{21}}{(x-x_2)} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{A_{s1}}{(x-x_s)} + \frac{A_{s2}}{(x-x_s)^2} + \ldots + \frac{A_{s\alpha_s}}{(x-x_s)^{\alpha_s}} \\
&+ \frac{M_{11}x+N_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} \\
&+ \frac{M_{21}x+N_{21}}{(x^2+p_2x+q_2)} + \frac{M_{22}x+N_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \ldots + \frac{M_{2\beta_2}x+N_{2\beta_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{M_{t1}x+N_{t1}}{(x^2+p_tx+q_t)} + \frac{M_{t2}x+N_{t2}}{(x^2+p_tx+q_t)^2} + \ldots + \frac{M_{t\beta_t}x+N_{t\beta_t}}{(x^2+p_tx+q_t)^{\beta_t}}.
\end{aligned}$$

След като намерим неизвестните константи интегрирането на $R(x)$ се свежда до интегрирането на съотвените елементарни дроби от записаната по-горе формула.

Определянето на неизвестните константи може да стане по следния начин:

Привеждаме под общ знаменател дробите в дясната част на формулата (разбира се, общият знаменател е полиномът $Q_k(x)$). Числителят на дробта отляво - полиномът $P_n(x)$, трябва да съвпада с числителя на дробта, която ще получим отдясно, за безброй много стойности на x. Оттук следва, че полиномът $P_n(x)$ тгрябва да е тъждествено равен на полинома, който се е получил като числител след привеждането под общ знаменател отдясно. Неизвестните константи определяме от това тъждество по някой от следните начини:

1) приравняване на коефициентите пред еднаквите степени на x и решаване на получената система от линейни уравнения;

2) даване на конкретни реални или комплексни стойности на променливата x;

3) диференциране и заместване на променливата x с конкретни стойности или приравняване на коефициентите пред еднаквите степени на x;

4) комбиниране на 1), 2) и 3).