18. Определен интеграл - определение на Дарбу. Еквивалентност на определенията

18.1. Определение на Дарбу.

Тъй като в редица случаи доказателството на сходимостта в дефиницията на Риман е трудно, ще дадем друга дефиниция на понятието определен интеграл.

Нека $f(x)$ е ограничена функция в интервала $[a, b]$ и е зададено разбиване τ : $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на този интервал. Да означим

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

и

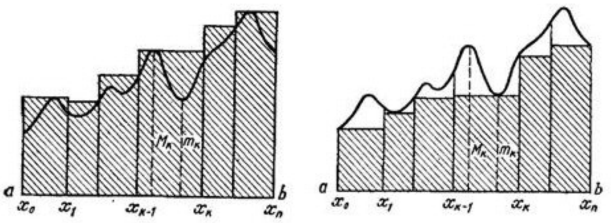
$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Разглеждаме изразите

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

които ще наричаме съответно **голяма и малка сума на Дарбу**, съответстващи на разбиването τ.



Да отбележим, че на всяко рабиване τ съответстват точно една голяма и една малка сума на Дарбу, за разлика от римановите суми, които са безброй много. При това е изпълнено

$$s_\tau \leq R_\tau \leq S_\tau,$$

независимо от избора на междинните точки, използвани при получаването на R_τ.

Определение 1. *Ще казваме, че разбиването τ_1 следва разбиването τ (записваме $\tau_1 \succ \tau$), ако делящите точки на τ са делящи точки и на τ_1.*

Свойство 1. *Ако $\tau_1 \succ \tau$, то са изпълнени неравенствата*

$$s_\tau \leq s_{\tau_1}, S_\tau \geq S_{\tau_1}.$$

Доказателство. Трябва да докажем, че при добавяне на нови делящи точки малките суми на Дарбу не намаляват, а големите суми на Дарбу не растат. Достатъчно е да разгледаме случая, когато τ_1 се получава от τ чрез добавяне на една деляща точка. Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и нека τ_1 да съдържа още една деляща точка y, лежаща в интервала (x_{i-1}, x_i).

Да означим

$$M' = \sup_{x \in [x_{i-1}, y]} f(x),$$

$$M'' = \sup_{x \in [y, x_i]} f(x).$$

Очевидно е, че $M' \leq M_i$ и $M'' \leq M_i$. Да сравним изразите S_τ и S_{τ_1}. Ясно е, че S_{τ_1} се получава от S_τ като събираемото $M_i(x_i - x_{i-1})$ се замени с две нови събираеми $M'(y - x_{i-1})$ и $M''(x_i - y)$. Имаме обаче

$$M'(y - x_{i-1}) + M''(x_i - y) \leq M_i(y - x_{i-1}) + M_i(x_i - y) = M_i(x_i - x_{i-1})$$

и следователно $S_\tau \geq S_{\tau_1}$.

Неравенството за малките суми на Дарбу се доказва аналогично. □

Свойство 2. *Всяка малка сума на Дарбу не надминава коя да е голяма сума.*

Доказателство. Нека τ_1 и τ_2 са две разбивания на интервала $[a, b]$. Ще докажем, че $s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}$. Да означим с τ разбиването, определено от всички делящи точки на τ_1 и τ_2. Тогава имаме $\tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$. Тогава от Свойство 1 получаваме:

$$s_{\tau_1} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq S_{\tau_1}.$$

□

От Свойство 2 следва, че големите и малките суми на Дарбу образуват ограничени множества.

Да означим с $\underline{I}$ точната горна граница на всички малки суми на Дарбу, а с $\overline{I}$ - точната долна граница на всички големи суми на Дарбу за функцията $f(x)$ в интервала $[a, b]$:

$$\underline{I} = \sup_\tau s_\tau, \quad \overline{I} = \inf_\tau S_\tau$$

по всевъзможните разбивания τ на интервала $[a, b]$. Числата $\underline{I}$ и $\overline{I}$ се наричат съответно **долен и горен интеграл на Дарбу** от $f(x)$ в интервала $[a, b]$. От Свойство 2 очевидно следва неравенството

$$\underline{I} \leq \overline{I}.$$

Определение 2 (Определение на Дарбу за интеграл). *Ограничената функция $f(x)$ в интервла $[a, b]$ се нарича* ***интегруема****, ако долният и горният интеграл на Дарбу съвпадат. Тяхната обща стойност се нарича* ***определен интеграл*** *от $f(x)$ в интервла $[a, b]$.*

Определение 3. *Нека функцията $f(x)$ е ограничена върху интервала $[a,b]$ и*

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

и

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Осцилация (колебание) на $f(x)$ върху $[a,b]$ наричаме величината

$$\omega(f) = M - m.$$

Не е трудно да се покаже, че осцилацията може да се пресметне и по друг начин:

Лема 1. *Нека функцията $f(x)$ е ограничена върху интервала $[a,b]$. Тогава*

$$\omega(f) = \sup_{x,y\in[a,b]} \left|f(x) - f(y)\right|.$$

Доказателство. Нека да означим

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

и

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Трябва да докажем, че:

1) $|f(x) - f(y)| \le \omega(f)$ за всеки $x, y \in [a,b]$;

2) за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $x, y \in [a,b]$ такива, че $|f(x) - f(y)| > \omega(f) - \varepsilon$.

Доказателство на 1). За всеки $x, y \in [a,b]$ са изпълнени неравенствата

$$m \le f(x) \le M,$$

$$-m \ge -f(y) \ge -M.$$

Оттук получаваме, че

$$m - M \le f(x) - f(y) \le M - m \text{ за всеки } x, y \in [a,b],$$

или, записано по друг начин

$$|f(x) - f(y)| \le M - m = \omega(f) \text{ за всеки } x, y \in [a,b],$$

Доказателство на 2). Нека ε е произволно положително число. От дефиницията на супремум и инфимум получаваме:

$$\text{за } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ съществува } x \in [a,b] \text{ такова, че } M \ge f(x) > M - \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\text{за } \frac{\varepsilon}{2} > 0 \text{ съществува } y \in [a,b] \text{ такова, че } m \le f(y) < m + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следователно

$$f(x) - f(y) > M - m - \varepsilon = \omega(f) - \varepsilon,$$

$$f(y) - f(x) < m - M + \varepsilon = -\omega(f) + \varepsilon,$$

или, записано по друг начин,

$$|f(x) - f(y)| > M - m - \varepsilon = \omega(f) - \varepsilon.$$

$\square$

Теорема 1 (Критерий на Дарбу). *Функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a,b]$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват разбивания τ_1 и τ_2 на интервала $[a,b]$ такива, че*

$$S_{\tau_1} - s_{\tau_2} < \varepsilon.$$

Доказателство. 1) Ако е изпълнено, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват разбивания τ_1 и τ_2 на интервала $[a,b]$ такива, че $S_{\tau_1} - s_{\tau_2} < \varepsilon$, то от неравенствата

$$s_{\tau_2} \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_{\tau_1}$$

следва, че $\overline{I} - \underline{I} < \varepsilon$ за всяко $\varepsilon > 0$. Следователно $\overline{I} = \underline{I}$.

2) Нека сега $f(x)$ е интегруема и $\varepsilon > 0$. От определенията за точна долна и точна горна граница следва, че могат да се намерят разбивания τ_1 и τ_2 така, че

$$s_{\tau_2} > \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_{\tau_1} < \overline{I} - \frac{\varepsilon}{2}$$

откъдето като използваме, че $\overline{I} = \underline{I}$, се получава неравенството в условието. $\square$

Забележка. Лесно се вижда, че можем да считаме, че $\tau_1 = \tau_2$. Наистина, ако τ е разбиване, което следва τ_1 и τ_2, то имаме $S_\tau - s_\tau \le S_{\tau_1} - s_{\tau_2}$. В този случай неравенството в условието на Критерия на Дарбу може да се запише във вида

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Ако означим с ω_i осцилацията на $f(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$, то можем да запишем неравенството и така:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Следствие 1. *Сумата и произведението на интегруеми функции е отново интегруема функция.*

Доказателство. Нека $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми функции в интервала $[a,b]$. Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ е разбиване на интервала $[a,b]$ и да означим съответно с $\omega_i(f)$ и $\omega_i(g)$ осцилациите на функциите $f(x)$ и $g(x)$ в интервала $[x_{i-1}, x_i]$.

1) Ще докажем, че $f(x)+g(x)$ е интегруема функция в интервала $[a,b]$. Да означим с $\omega_i(f+g)$ осцилацията на функцията $f(x)+g(x)$ в интервала $[x_{i-1},x_i]$. За всеки две точки $x,y\in[x_{i-1},x_i]$ имаме

$$|(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y))|=|(f(x)-f(y))+(g(x)-g(y))|\le$$

$$\le|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|\le\omega_i(f)+\omega_i(g).$$

Оттук следва и

$$\omega_i(f+g)\le\omega_i(f)+\omega_i(g).$$

След умножаване с x_i-x_{i-1} и сумиране по i получаваме

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f+g)(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)(x_i-x_{i-1}).$$

От интегруемостта на $f(x)$ и $g(x)$ следва, че за подходящо разбиване τ дясната страна на неравенството може да бъде направена произволно малка и следователно същото може да бъде направено и за лявата страна, което доказва интегруемостта на $f(x)+g(x)$ в интервала $[a,b]$.

2) Ще докажем, че $f(x)g(x)$ е интегруема функция в интервала $[a,b]$. Да означим с $\omega_i(fg)$ осцилацията на функцията $f(x)g(x)$ в интервала $[x_{i-1},x_i]$. Тъй като $f(x)$ и $g(x)$ са ограничени в интервала $[a,b]$, то съществуват положителни константи L и M такива, че за $x\in[a,b]$ са изпълнени неравенствата $|f(x)|\le L$ и $|g(x)|\le M$. За всеки две точки $x,y\in[x_{i-1},x_i]$ имаме

$$|f(x)g(x)-f(y)g(y)|=|f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|=$$

$$=|f(x)(g(x)-g(y))+g(y)(f(x)-f(y))|\le|f(x)|\,|g(x)-g(y)|+|g(y)|\,|f(x)-f(y)|\le$$

$$\le L\,|g(x)-g(y)|+M\,|f(x)-f(y)|\le L\omega_i(g)+M\omega_i(f).$$

Оттук следва и

$$\omega_i(fg)\le L\omega_i(g)+M\omega_i(f).$$

След умножаване с x_i-x_{i-1} и сумиране по i получаваме

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(fg)(x_i-x_{i-1})\le L\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)(x_i-x_{i-1})+M\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)(x_i-x_{i-1}).$$

От интегруемостта на $f(x)$ и $g(x)$ следва, че за подходящо разбиване τ дясната страна на неравенството може да бъде направена произволно малка и следователно същото може да бъде направено и за лявата страна, което доказва интегруемостта на $f(x)g(x)$ в интервала $[a,b]$. $\square$

18.2. Еквивалентност на определенията на Риман и Дарбу за определен интеграл.

Лема 2. *Нека M е точната горна граница, а m - точната долна граница на функцията $f(x)$ в интервала $[a,b]$. Нека τ_1 и τ_2 са две разбивания на този интервал, като τ_2 се получава от τ_1 чрез добавяне на k нови делящи точки. Тогава за съответните суми на Дарбу са изпълнени неравенствата*

$$S_{\tau_1}-S_{\tau_2}\le k(M-m)\sigma(\tau_1),\quad s_{\tau_2}-s_{\tau_1}\le k(M-m)\sigma(\tau_1).$$

Доказателство. Достатъчно в да се разгледа случаят, когато τ_2 се получава от τ_1 чрез добавяне на 1 деляща точка, общият случай може да бъде доказан, като се приложи k пъти полученото твърдение. Нека да предположим, че новата деляща точка y се намира в интервала (x_{i-1}, x_i), и да означим с M' и M'' точната горна граница на $f(x)$ съответно в интервалите $[x_{i-1}, y]$ и $[y, x_i]$. Тогава имаме

$$S_{\tau_1} - S_{\tau_2} = (M_i - M')(y - x_{i-1}) + (M_i - M'')(x_i - y) \leq$$

$$\leq (M - m)(y - x_{i-1}) + (M - m)(x_i - y) =$$

$$= (M - m)(x_i - x_{i-1}) \leq (M - m)\sigma(\tau_1).$$

С това твърдението за големите суми на Дарбу е доказано. За малките суми доказателството е аналогично.

$\square$

Лема 3 (на Дарбу). *Изпълнени са равенствата*

$$\overline{I} = \lim_{\sigma(\tau)\to 0} S_\tau \text{ и } \underline{I} = \lim_{\sigma(\tau)\to 0} s_\tau.$$

(Границите при $\sigma(\tau) \to 0$ се разбират по същия начин, както при дефиницията на Риман за интеграл.)

Доказателство. Ще докажем твърдението за големите суми на Дарбу. За малките суми то се доказва аналогично. От дефиницията на $\overline{I}$ имаме, че за фиксирано $\varepsilon > 0$ може да се намери разбиване τ_0 на интервала $[a, b]$ с делящи точки $x_0, x_1, \dots, x_k$ такова, че

$$S_{\tau_0} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Да положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2k(M-m)}$, където M и m са както в Лема 2. Нека τ е произволно разбиване с диаметър, по-малък от δ. Да означим с τ_1 разбиването, определено от делящаите точки на τ и τ_0. От Лема 2 имаме

$$S_\tau - S_{\tau_1} \leq k(M - m)\sigma(\tau) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тъй като $S_{\tau_1} \leq S_{\tau_0}$, то $S_{\tau_1} - \overline{I} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и следователно

$$S_\tau - \overline{I} = S_\tau - S_{\tau_1} + S_{\tau_1} - \overline{I} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Теорема 2. *Една фунция е интегруема по дефиницията на Риман тогава и само тогава, когато тя е интегруема по дефиницията на Дарбу. При това двете дефиниции дават една и съща стойност на интеграла.*

Доказателство. 1) Нека функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ по определението на Риман. Да фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и да изберем $\delta > 0$ такова, че при всяко разбиване τ, за което $\sigma(\tau) < \delta$, да имаме за римановата сума R_τ за това разбиване

$$|I - R_\tau| < \varepsilon$$

независимо от избора на междинните точки.

Нека делящите точки на разбиването τ са $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Тогава горното неравенство ще бъде изпълнено при всеки избор на междинните точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Да оставим всяка от стойностите $f(\xi_i)$ да клони към точната горна граница M_i. Чрез граничен преход в горното неравенство получаваме

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \varepsilon.$$

По аналогичен начин когато всяка от стойностите $f(\xi_i)$ клони към точната долна граница m_i получаваме

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \varepsilon.$$

Следователно

$$I - \varepsilon \leq s_\tau \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_\tau \leq I + \varepsilon.$$

Тъй като ε е произволно положително число, имаме $\underline{I} = \overline{I} = I$.

2) Нека сега функцията $f(x)$ е интегруема в интервала $[a, b]$ по определението на Дарбу. Очевидно за всяко разбиване τ на интервала $[a, b]$ са изпълнени неравенствата

$$s_\tau \leq R_\tau \leq S_\tau,$$

както и да избираме междинните точки в израза за R_τ. По Лема 3 за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че при $\sigma(\tau) < \delta$ да имаме

$$\underline{I} - \varepsilon < s_\tau \leq S_\tau < \overline{I} + \varepsilon.$$

Тъй като функцията $f(x)$ е интегруема по определението на Дарбу, изпълнено е равенството $\underline{I} = \overline{I}$. Следователно ако означим $I = \underline{I} = \overline{I}$ при $\sigma(\tau) < \delta$ имаме $|R_\tau - I| < \varepsilon$. $\square$