21. Интегриране по части и смяна на променливите в определения интеграл.

21.1. Интегриране по части в определения интеграл.

Теорема 1. *Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ имат непрекъснати първи производни в интервала $[a, b]$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = (f(x)g(x))\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x).$$

Това равенство се нарича формула за интегриране по части в определения интеграл.

Доказателство. Имаме

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,df(x) + \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

По формулата на Лайбниц-Нютон за интеграла в лявата страна на равенството имаме

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = (f(x)g(x))\Big|_a^b$$

След като заместим в горното равенство получаваме

$$(f(x)g(x))\Big|_a^b = \int_a^b g(x)\,df(x) + \int_a^b f(x)\,dg(x),$$

откъдето след разместване на събираемите имаме

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = (f(x)g(x))\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x).$$

□

21.2. Смяна на променливите в определения интеграл.

Теорема 2. *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала Δ. Нека функцията $\varphi(t)$ има непрекъсната първа производна в интервала $[\alpha, \beta]$, като $\varphi(t) \in \Delta$ за всяко $t \in [\alpha, \beta]$. Да положим $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, и нека интервалът с краища a и b се съдържа в интервала Δ. Тогава е изпълнено равенството*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Доказателство. Нека $F(x)$ е произволна примитивна на $f(x)$ в интервала Δ и нека $\Phi(t) = F(\varphi(t))$. Тогава от формулата

$$\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

следва, че

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

$\square$