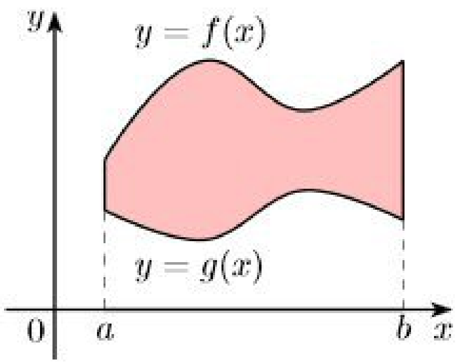
22. Някои геометрични и физични приложения на определения интеграл

22.1. Лице на криволинеен трапец.

За да изведем формула за лице на равнинна фигура се нуждаем от нейното аналитично описание. Ще разгледаме един клас от фигури, които могат да бъдат описани с помощта на неравенства.

Нека в интервала $[a, b]$ са дефинирани непрекъснатите функции $f(x)$ и $g(x)$, като $f(x) \geq g(x)$ за всяко $x \in [a, b]$. **Криволинеен трапец** (с основи, успоредни на оста Oy) определен от функциите $f(x)$ и $g(x)$, наричаме фигурата, съставена от всички точки (x, y), удовлетворяващи неравенствата $a \leq x \leq b$ и $g(x) \leq y \leq f(x)$, т.е.

$$V = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

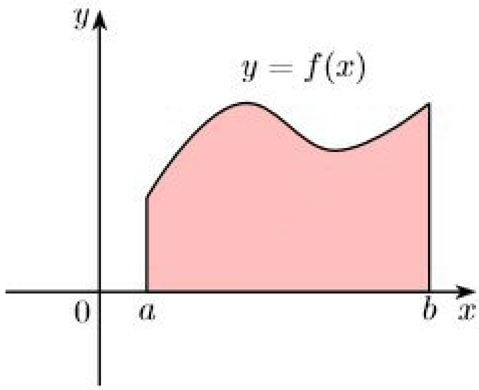


Всички фигури от елементарната геометрия могат да бъдат представени или като криволинеен трапец, или като обединение на краен брой криволинейни трапци. Например, всеки правоъгълник, кръг или елипса могат да бъдат представени като криволинеен трапец. Кръговият венец (фигурата, ограничена от две концентрични окръжности) не е криволинеен трапец, но може да бъде разделен на четири криволинейни трапеца с помощта на две прави, успоредни на ординатната ос.

Ще намерим формула за лицето $m(V)$ на криволинейния трапец V. За улеснение, нека първо да предположим, че $g(x) = 0$. Да означим

$$V_f = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ е произволно разбиване на интервала $[a, b]$.



Да означим за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

и

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Дефинираме стъпаловидните функции

$$s(x) = \begin{cases} m_i, & x \in [x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \ldots, n \\ m_n, & x = x_n \end{cases}$$

и

$$S(x) = \begin{cases} M_i, & x \in [x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \ldots, n \\ M_n, & x = x_n \end{cases}.$$

Очевидно имаме неравенствата

$$s(x) \leq f(x) \leq S(x) \text{ за всяко } x \in [a, b].$$

Да означим

$$V_s = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq s(x)\}$$

и

$$V_S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq S(x)\}.$$

Всяка от тези две фигури представлява обединение на n на брой правоъгълници с лица $m_i(x_i - x_{i-1})$ (за V_s) и $M_i(x_i - x_{i-1})$ (за V_S), $i = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно имаме $V_s \subset V_f \subset V_S$, от където следват неравенствата $m(V_s) \leq m(V_f) \leq m(V_S)$. Замествайки лицата отляво и отдясно, получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq m(V_f) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

като сумите вляво и в дясно са точно малката и голямата сума на Дарбу за $f(x)$, съответстващи на разбиването τ. Тъй като $f(x)$ е непрекъсната (и следователно, интегруема) в $[a,b]$, след граничен преход $\sigma(\tau) \to 0$ веднага получаваме

$$m(V_f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Сега да разгледаме общия случай - криволинейния трапец

$$V = \{(x,y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}.$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че $f(x)$ и $g(x)$ са положителни функции. Тогава имаме $m(V) = m(V_f) - m(V_g)$, откъдето следва формулата

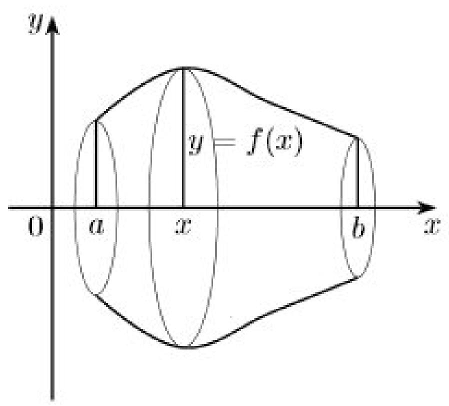
$$m(V) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

22.2. Обем на ротационно тяло.

Много от телата, срещани в геометрията, притежават т.нар. ос на въртене. Това означава, че съществува такава права, че при всяко завъртане около нея тялото остава непроменено. Такива тела могат да се разглеждат като получени от дадена плоска фигура чрез въртене около тази ос.

Ще дадем точната дефиниция на ротационно тяло. Нека $f(x)$ е неотрицателна непрекъсната функция, дефинирана в интервала $[a,b]$. Под **ротационно тяло**, породено от $f(x)$, ще разбираме множеството от точки в пространството

$$B_f = \left\{(x,y,z) : a \le x \le b, \sqrt{y^2+z^2} \le f(x)\right\}.$$



Примери на ротационни тела са цилиндърът (породен от $f(x) = r$, където r е радиусът на основата), конусът (породен от $f(x) = \frac{r}{h}(h-x)$, $x \in [0,h]$, където r

е радиусът на основата, а h - височината), сферата (породена от $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$, където r е радиусът на сферата).

Сега ще изведем формула за обема $V(B_f)$ на ротационното тяло B_f. Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ е произволно разбиване на интервала $[a, b]$ и нека $s(x)$ и $S(x)$ са съответните стъпаловидни функции, дефинирани както по-горе. Нека да означим с B_s и B_S ротационните тела, породени съответно от функциите $s(x)$ и $S(x)$. Тогава са изпълнени включванията $B_s \subset B_f \subset B_S$. Оттук следва, че за обемите на тези тела са изпълнени неравенствата $V(B_s) \leq V(B_f) \leq V(B_S)$.

Да пресметнем обемите на B_s и B_S. Всяко едно от тези тела представлява обединение на n на брой цилиндри, съответстващи на броя на интервалите $[x_{i-1}, x_i]$. Всеки цилиндър от B_s има височина $x_i - x_{i-1}$ и радис на основата m_i и следователно обемът му е равен на $\pi m_i^2(x_i - x_{i-1})$. Обемът на B_s се получава, като сумираме обемите на всички такива цилиндри при $i = 1, 2, \ldots, n$. Аналогчино се получава и обема на B_S (трябва само да се замени m_i с M_i). Така неравенствата между обемите на телата B_s, B_f и B_S добиват вида

$$\sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2(x_i - x_{i-1}) \leq V(B_f) \leq \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2(x_i - x_{i-1}).$$

Можем да забележим, че изразите отляво и отдясно представляват съответно малката и голямата сума на Дарбу за функцията $\pi f^2(x)$, отговарящи на разбиването τ. Тъй като τ е произволно избрано, а функцията $\pi f^2(x)$ е интегруема, след граничен преход при $\sigma(\tau) \to 0$ получаваме формулата

$$V(B_f) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

22.3. Център на тежеста на криволинеен трапец.

Ще изведем формули за намиране на координатите на центъра на тежестта на еднороден криволинеен трапец

$$V = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

Да фиксираме произволно разбиване τ на интервала $[a, b]$, състоящо се от делящите точки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и междинните точки $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Това ни дава и разделяне на областта V на n на брой части $V_1, V_2, \ldots, V_n$, като с V_i означаваме частта от V, намираща се над подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$. Замествайки в този интервал функциите $f(x)$ и $g(x)$ със стойностите им в междинната точка ξ_i виждаме, че фигурата V_i може да бъде заместена с правоъгълника $P_i = \{(x,y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, g(\xi_i) \leq y \leq f(\xi_i)\}$. Лицето (и масата) на прзвоъгълника P_i се равнява на

$$m(P_i) = (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}).$$

Центърът на тежеста на правоъгълника P_i се намира в неговия геометричен център - точката

$$\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{f(\xi_i) + g(\xi_i)}{2}\right).$$

Считайки, че масата на всеки от правоъгълниците P_i е съсредоточена в неговия център на тежеста, получаваме следните приблизителни формули за центъра на тежеста на V:

$$\overline{x_\tau} = \frac{1}{m(V)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}),$$

$$\overline{y_\tau} = \frac{1}{m(V)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(\xi_i) + g(\xi_i)}{2}\right) (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}),$$

където с $m(V)$ е означено лицето на фигурата V. За координатите на центъра на тежеста на V имаме

$$\overline{x} = \lim_{\sigma(\tau)\to 0} \overline{x_\tau} \text{ и } \overline{y} = \lim_{\sigma(\tau)\to 0} \overline{y_\tau}.$$

За да сведем задачата към риманови суми да положим

$$x_\tau = \frac{1}{m(V)} \sum_{i=1}^{n} \xi_i (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}),$$

$$y_\tau = \overline{y_\tau} = \frac{1}{m(V)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f(\xi_i) + g(\xi_i)}{2}\right) (f(\xi_i) - g(\xi_i))(x_i - x_{i-1}).$$

Може да се покаже, че разликата $\overline{x_\tau} - x_\tau$ клони към нула при $\sigma(\tau) \to 0$. Тъй като x_τ и y_τ са риманови суми, съответстващи на разбиването τ, след граничен преход при $\sigma(\tau) \to 0$ получаваме формулите за координатите на центъра на тежеста на криволинейния трапец V:

$$\overline{x} = \frac{1}{m(V)} \int_a^b x(f(x) - g(x))\, dx,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m(V)} \int_a^b \left(\frac{f^2(x) - g^2(x)}{2}\right)\, dx.$$