23. Несобствени интеграли. Критерии за сравнение

В предходните теми разгледахме определени интеграли от ограничени функции, дефинирани в крайни интервали. Оказва се, че в много случай има смисъл да се разглеждат интеграли от функции, които са дефинирани в безкраен интервал или са неограничени.

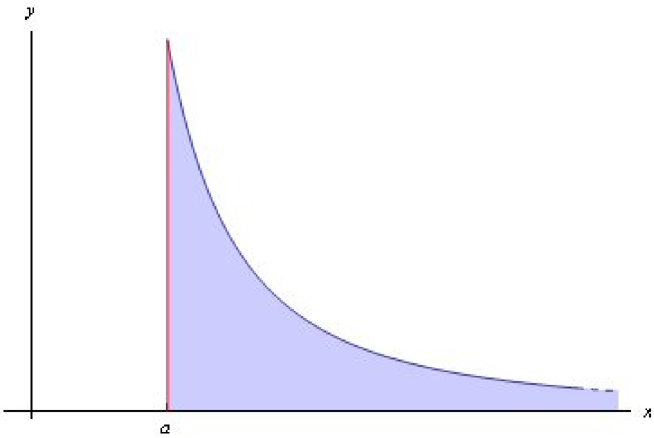
23.1. Определения и важни примери.

Определение 1. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a, +\infty)$ и е интегруема във всеки негов краен подинтервал от вида $[a, A]$.* ***Несобствен интеграл от I род*** $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *се дефинира чрез формулата*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} f(x)\,dx,$$

ако границата в дясната страна на равенството съществува и е крайна.

В този случай (ако границата съществува и е крайна) ще казваме, че несобственият интеграл е ***сходящ****, а в противнив случай - че е* ***разходящ****.*



По аналогичен начин може да бъде дефиниран и несобствен интеграл от вида $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$.

Несобствен интеграл от I род от функцията $f(x)$ върху цялата реална права $(-\infty, +\infty)$ се дефинира с формулата

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

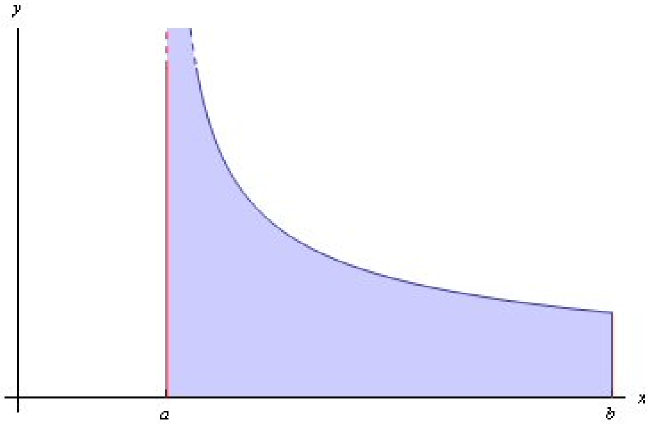
при положение, че и двата интеграла в дясната страна на равенството са сходящи (лесно се вижда, че в такъв случай стойността на сумата отдясно не зависи от избора на числото a).

Определение 2. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a, b]$ и е интегруема във всеки негов затворен подинтервал от вида $[a+\delta, b]$, $\delta > 0$.* ***Несобствен интеграл от II род*** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *се дефинира чрез формулата*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \int\limits_{a+\delta}^b f(x)\,dx,$$

ако границата в дясната страна на равенството съществува и е крайна.

В този случай (ако границата съществува и е крайна) ще казваме, че несобственият интеграл е ***сходящ****, а в противнив случай - че е* ***разходящ****.*



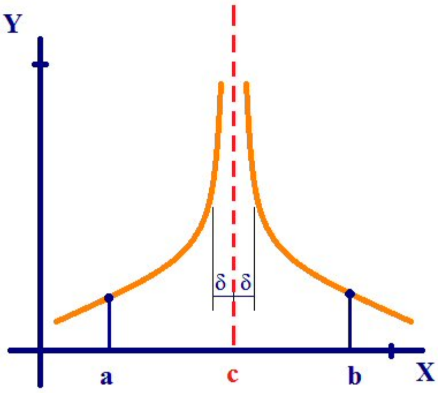
Ясно е, че тази дефиниция има смисъл само когато обичайната дефиниция за определен интеграл е неприложима, например ако $f(x)$ е неограничена в интервала $(a, b]$. В този случай точката a се нарича **особена точка** за несобствения интеграл.

По аналогичен начин се дефинира несобствен интеграл от II род в случая, когато особената точка е в десния край b на дефиниционния интервал $[a, b)$, т.е. $f(x)$ е интегруема във всеки подинтервал $[a, b-\delta]$.

Накрая, нека c е вътрешна точка за интервала $[a, b]$ и c е особена точка за интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, т.е. функцията $f(x)$ е интегруема във всички подинтервали от вида $[a, c-\delta]$ и $[c+\delta, b]$, $\delta > 0$. Тогава несобствен интеграл от II род от функцията $f(x)$ върху интервала $[a, b]$ с особена точка c се дефинира с формулата

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

при положение, че и двата интеграла в дясната страна на равенството са сходящи.



Пример 1. Нека $\lambda > 0$. Разглеждаме несобствения интеграл от II род

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda}\, dx$$

с особена точка a. Имаме

$$\int_{a+\delta}^b \frac{1}{(x-a)^\lambda}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1}{(b-a)^{\lambda-1}} - \frac{1}{\delta^{\lambda-1}}\right) & \text{при } \lambda \neq 1 \\ \ln(b-a) - \ln\delta & \text{при } \lambda = 1 \end{cases}$$

При $\delta \to 0$ дясната страна има крайна граница при $\lambda - 1 < 0$ и клони към безкрайност при $\lambda - 1 \geq 0$. Оттук става ясно, че разглежданият интеграл е сходящ при $\lambda < 1$ и е разходящ при $\lambda \geq 1$, т.е.

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda}\, dx \text{ е сходящ } \iff \lambda < 1.$$

По аналогичен начин се получава и че

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\lambda}\, dx \text{ е сходящ } \iff \lambda < 1$$

(в този интеграл особената точка е b).

Пример 2. Нека $\lambda > 0$. Разглеждаме несобствения интеграл от I род

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda}\, dx.$$

Имаме

$$\int_a^A \frac{1}{x^\lambda}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{1}{A^{\lambda-1}} - \frac{1}{a^{\lambda-1}}\right) & \text{при } \lambda \neq 1 \\ \ln A - \ln a & \text{при } \lambda = 1 \end{cases}$$

При $A \to +\infty$ дясната страна има крайна граница при $\lambda - 1 > 0$ и клони към безкрайност при $\lambda - 1 \le 0$. Оттук става ясно, че разглежданият интеграл е сходящ при $\lambda > 1$ и е разходящ при $\lambda \le 1$, т.е.

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda}\, dx \text{ е сходящ } \iff \lambda > 1.$$

23.2. Несобствени интеграли от неотрицателни функции. Критерий за сравнение.

Лема 1. *Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна в интервала $[a, +\infty)$. Несобственият интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ е сходящ тогава и само тогава, когато множеството*

$$\left\{ \int\limits_a^A f(x)\, dx : A > a \right\}$$

е ограничено отгоре.

Доказателство. Да положим

$$\varphi(A) = \int\limits_a^A f(x)\, dx, A > a.$$

Ако $a < A_1 < A_2$, то

$$\varphi(A_2) = \int\limits_a^{A_2} f(x)\, dx = \int\limits_a^{A_1} f(x)\, dx + \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\, dx \ge \int\limits_a^{A_1} f(x)\, dx = \varphi(A_1),$$

т.е. функцията $\varphi(A)$ е монотонно растяща в интервала $(a, +\infty)$.

По определение несобственият интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ е сходящ когато съществува крайната граница $\lim\limits_{A \to +\infty} \varphi(A)$. Това обаче е изпълнено тогава и само тогава, когато функцията $\varphi(A)$ е ограничена отгоре.

$\square$

Теорема 1 (Критерий за сравнение). *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала $[a, +\infty)$ и нека $0 \le f(x) \le g(x)$ за всяко $x \in [a, +\infty)$. Тогава:*

1) ако $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ е сходящ, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ е също сходящ;

2) ако $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ е разходящ, то $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ е също разходящ.

Доказателство. Ако положим

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,dx, A > a$$

и

$$G(A) = \int_a^A g(x)\,dx, A > a,$$

то за всяко $A > a$ ще бъде изпълнено $F(A) \leq G(A)$. Тогава ако функцията $G(A)$ е ограничена отгоре, то такава ще бъде и $F(A)$. От друга страна, от неограничеността отгоре на $F(A)$ ще следва неограниченост отгоре и за $G(A)$. Прилагането на предходната лема доказва твърдението. $\square$

Следствие 1 (Гранична форма на критерия за сравнение). *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала $[a, +\infty)$, $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ за всяко $x \in [a, +\infty)$ и нека съществува крайната или безкрайна граница*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Тогава:

1) ако $0 \leq K < +\infty$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ е сходящ, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е също сходящ;

2) ако $0 < K \leq +\infty$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ е разходящ, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е също разходящ.

Доказателство. 1) Нека $0 \leq K < +\infty$. Тъй като $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ за $\varepsilon = 1 > 0$ съществува $A > a$ такова, че при $x > A$ е изпълнено $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < 1$. В частност, изпълнено е наравенството $\frac{f(x)}{g(x)} < K + 1$ при $x > A$, т.е. $f(x) < (K + 1)g(x)$ при $x > A$.

Ако е сходящ интегралът $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, то сходящ ще бъде и $\int_A^{+\infty} (K+1)g(x)\,dx$. Сега от неравенството погоре и критерия за сравнение следва, че $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$ е също сходящ интеграл. Тогава е сходящ и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

2) Нека $0 < K \leq +\infty$. Тогава можем да фиксираме такова число L, че да са изпълнени неравенствата $0 < L < K$. Тъй като $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, то от неравенството $L < K$ следва, че съществува $A > a$ такова, че при $x > A$ е изпълнено $\frac{f(x)}{g(x)} > L$, т.е. $f(x) > L.g(x)$ при $x > A$.

Ако е разходящ интегралът $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, то разходящ ще бъде и $\int_A^{+\infty} L.g(x)\,dx$. От неравенството по-горе и критерия за сравнение следва, че $\int_A^{+\infty} f(x)\,dx$ е също разходящ интеграл. Тогава е разходящ и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. $\square$

При решаване на задачи е по-удобно да се използва граничната форма на критерия, тъй като винаги от схоимостта или разходимостта на интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ се прави извод за схоимостта или разходимостта на $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Често $g(x)$ е разгледаната в Пример 2 функция, т.е. $g(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$. Да припомним, че

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda}\,dx \text{ е сходящ } \iff \lambda > 1.$$

Ще докажем трите твърдения и за несобствени интеграли от II род.

Лема 2. *Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна в интервала $(a, b]$. Несобственият интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (с особена точка a) е сходящ тогава и само тогава, когато множеството*

$$\left\{ \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx : 0 < \delta < b - a \right\}$$

е ограничено отгоре.

Доказателство. Да положим

$$\varphi(\delta) = \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx, 0 < \delta < b - a.$$

Ако $0 < \delta_1 < \delta_2 < b - a$, то

$$\varphi(\delta_1) = \int\limits_{a+\delta_1}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a+\delta_1}^{a+\delta_2} f(x)\,dx + \int\limits_{a+\delta_2}^{b} f(x)\,dx \geq \int\limits_{a+\delta_2}^{b} f(x)\,dx = \varphi(\delta_2),$$

т.е. функцията $\varphi(\delta)$ е монотонно намаляваща в интервала $(0, b - a)$.

По определение несобственият интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ е сходящ когато съществува крайната граница $\lim\limits_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} \varphi(\delta)$. Това обаче е изпълнено тогава и само тогава, когато функцията $\varphi(\delta)$ е ограничена отгоре. $\square$

Теорема 2 (Критерий за сравнение). *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала $(a, b]$ и нека $0 \leq f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in (a, b]$. Тогава:*

1) ако $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ е сходящ, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ е също сходящ;

2) ако $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ е разходящ, то $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ е също разходящ.

Доказателство. Ако положим

$$F(\delta) = \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx, 0 < \delta < b - a$$

и

$$G(\delta) = \int\limits_{a+\delta}^{b} g(x)\,dx, 0 < \delta < b - a,$$

то за всяко $\delta, 0 < \delta < b-a$, ще бъде изпълнено $F(\delta) \leq G(\delta)$. Тогава ако функцията $G(\delta)$ е ограничена отгоре, то такава ще бъде и $F(\delta)$. От друга страна, от неограничеността отгоре на $F(\delta)$ ще следва неограниченост отгоре и за $G(\delta)$. Прилагането на предходната лема доказва твърдението. □

Следствие 2 (Гранична форма на критерия за сравнение). *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала $(a, b]$, $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ за всяко $x \in (a, b]$ и нека съществува крайната или безкрайна граница*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Тогава:

1) ако $0 \leq K < +\infty$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ е сходящ, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ е също сходящ;

2) ако $0 < K \leq +\infty$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ е разходящ, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ е също разходящ.

Доказателство. 1) Нека $0 \leq K < +\infty$. Тъй като $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$ за $\varepsilon = 1 > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че при $a < x < a + \delta$ е изпълнено $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - K\right| < 1$. В частност, изпълнено е наравенството $\dfrac{f(x)}{g(x)} < K + 1$ при $x > A$, т.е. $f(x) < (K + 1)g(x)$ при $a < x < a + \delta$.

Ако е сходящ интегралът $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, то сходящ ще бъде и $\int\limits_a^{a+\delta} (K + 1)g(x)\,dx$. Сега от неравенството по-горе и критерия за сравнение следва, че $\int\limits_a^{a+\delta} f(x)\,dx$ е също сходящ интеграл. Тогава е сходящ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

2) Нека $0 < K \leq +\infty$. Тогава можем да фиксираме такова число L, че да са изпълнени неравенствата $0 < L < K$. Тъй като $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, то от неравенството $L < K$ следва, че съществува $\delta > 0$ такова, че при $a < x < a + \delta$ е изпълнено $\dfrac{f(x)}{g(x)} > L$, т.е. $f(x) > L.g(x)$ при $a < x < a + \delta$.

Ако е разходящ интегралът $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, то разходящ ще бъде и $\int\limits_a^{a+\delta} L.g(x)\,dx$. От неравенството по-горе и критерия за сравнение следва, че $\int\limits_a^{a+\delta} f(x)\,dx$ е също разходящ интеграл. Тогава е разходящ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

□

Отново при решаване на задачи е по-удобно да се използва граничната форма на критерия. Често $g(x)$ е една от разгледаните в Пример 1 функции, т.е. $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^\lambda}$, ако особената точка е a, и $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\lambda}$, ако особената точка е b. Да припомним, че

$$\int\limits_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda}\,dx \text{ е сходящ } \iff \lambda < 1.$$

$$\int\limits_a^b \frac{1}{(b-x)^\lambda}\,dx \text{ е сходящ } \iff \lambda < 1.$$