24. Функции на две и повече променливи - основни понятия, граница и непрекъснатост

24.1. n-мерно евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Множества от точки в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Множеството, състоящо се от всички наредени n-торки от реални числа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се нарича* ***n-мерно координатно пространство*** *и се означава с $\mathbb{R}^n$. Всяка наредена n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се нарича* ***точка*** *от n-мерното координатно пространство, а реалните числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се наричат* ***координати*** *на тази точка.*

Забележка. Пространството $\mathbb{R}^n$ може да се разглежда и като множеството от всички вектори с координати $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ако x и y са вектори от $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, можем да дефинираме операциите сума на два вектора чрез равенството

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

и умножение със скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ чрез равенството

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Така $\mathbb{R}^n$ става **линейно пространство**.

Определение 2. *Нека x и y са произволни точки от $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.* ***Разстояние*** *$\rho(x, y)$ между точките x и y се дефинира чрез равенството*

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Координатното пространство $\mathbb{R}^n$, между всеки две точки на което е дефинирано разстояние, се нарича ***евклидово пространство****.*

Частни случай. 1) Евклидовата равнина $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. В нея разстоянието между две точки $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ се дефинира чрез

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

2) Тримерното евклидово пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. В него разстоянието между две точки $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ се дефинира чрез

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Определение 3. ***Отворено** n**-мерно кълбо** с център точка $M_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиус $R > 0$ наричаме множеството*

$$K(M_0, R) = \{M \in R^n : \rho(M, M_0) < R\}.$$

Определение 4. ***Затворено** n**-мерно кълбо** с център точка $M_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиус $R > 0$ наричаме множеството*

$$\overline{K(M_0, R)} = \{M \in R^n : \rho(M, M_0) \leq R\}.$$

Определение 5. *n**-мерна сфера** с център точка $M_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиус $R > 0$ наричаме множеството*

$$S(M_0, R) = \{M \in R^n : \rho(M, M_0) = R\}.$$

Определение 6. *ε**-околност** на точката $M_0 \in \mathbb{R}^n$ наричаме отвореното n-мерно кълбо с център точка $M_0 \in \mathbb{R}^n$ и радиус $\varepsilon > 0$, т.е.*

$$U(M_0, \varepsilon) = K(M_0, \varepsilon) = \{M \in R^n : \rho(M, M_0) < \varepsilon\}.$$

Определение 7. *Нека $G \subset \mathbb{R}^n$. Казваме, че точката $M_0 \in G$ е **вътрешна точка** за множеството G, ако съществува ε-околност $U(M_0, \varepsilon)$ на точката M_0 такава, че $U(M_0, \varepsilon) \subset G$.*

Определение 8. *Нека $G \subset \mathbb{R}^n$. Казваме, че точката $M_0 \notin G$ е **външна точка** за множеството G, ако съществува ε-околност $U(M_0, \varepsilon)$ на точката M_0 такава, че $U(M_0, \varepsilon) \cap G = \varnothing$ (т.е. $U(M_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus G$).*

Определение 9. *Нека $G \subset \mathbb{R}^n$. Казваме, че точката M_0 е **гранична точка** за множеството G, ако тя не е нито вътрешна, нито външна точка за G, т.е. за всяка ε-околност $U(M_0, \varepsilon)$ на точката M_0 е изпълнено, че $U(M_0, \varepsilon) \cap G \neq \varnothing$ и $U(M_0, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus G) \neq \varnothing$.*

Забележка. Една гранична точка M за множеството G може както да принадлежи, така и да не принадлежи на G. Всяка точка от n-мерната сфера $S(M_0, R)$

представлява гранична точка както за отвореното n-мерно кълбо $K(M_0, R)$, така и за затвореното n-мерно кълбо $\overline{K(M_0, R)}$. От друга страна, всяка точка от тази сфера не принадлежи на отвореното n-мерно кълбо и принадлежи на затвореното n-мерно кълбо.

Определение 10. *Нека $G \subset \mathbb{R}^n$. Казваме, че точката M_0 е* ***точка на сгъстяване*** *за множеството G, ако за всяка ε-околност $U(M_0, \varepsilon)$ на точката M_0 съществува точка $M \in G$ такава, че $M \in U(M_0, \varepsilon)$.*

Определение 11. *Множеството $G \subset \mathbb{R}^n$ се нарича* ***отворено****, ако всяка точка $M_0 \in G$ е вътрешна за G (т.е. всяка точка от G се съдържа в G заедно с някоя своя ε-околност).*

Определение 12. *Множеството $G \subset \mathbb{R}^n$ се нарича* ***затворено****, ако то съдържа всички свой гранични точки.*

Определение 13. *Произволно отворено множество $G \subset \mathbb{R}^n$, съдържащо дадена точка M_0, се нарича* ***околност*** *на точката M_0.*

Определение 14. *Нека $G \subset \mathbb{R}^n$. Казваме, че множеството G е* ***ограничено****, ако съществува отворено n-мерно кълбо $K(O, R)$ с център в началото на координатната система $O(0, 0, \ldots, 0)$, което съдържа G.*

Определение 15. ***Непрекъсната крива*** *L в пространството $\mathbb{R}^n$ наричаме множеството от точки на това пространство, координатите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на които представляват непрекъснати функции на параметър t:*

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t), \alpha \leq t \leq \beta.$$

Определение 16. *Множеството $G \subset \mathbb{R}^n$ се нарича* ***свързано****, ако всеки две точки от това множество могат да се съединят с непрекъсната крива, всички точки на която принадлежат отново на G.*

Определение 17. *Всяко отворено и свързано множество $G \subset \mathbb{R}^n$ се нарича* ***област****.*

24.2. Функции на две и повече променливи - основни понятия.

Определение 18. *Нека $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}$. Нека по някакво правило, означено с f, на всяка точка $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ е съпоставено* ***единствено*** *число y от множеството Y. Това правило f се нарича функция, дефинирана в множеството X и приемаща стойности в множеството Y.*

В Определение 18 точката M може да се разглежда като n на брой променливи величини. Ето защо $x_1, x_2, \dots, x_n$ се наричат **независими променливи** или **аргументи** на функцията, а образът y - **стойност на функцията**.

Множеството $X \subset \mathbb{R}^n$ се нарича **дефиниционна област** на функцията f. Означава се с D_f.

Множеството $R_f = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f\}$, състоящо се от всички стойности, които функцията f приема, се нарича **множество от стойности** на функцията f.

Примери.

1) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Дефиниционната област на тази функция е кръг с радиус 2 и център в началото на координатната система: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Областта от стойности е интервалът $[0, 2]$.

2) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$. Дефиниционната област на тази функция външността на кръг с радиус 2 и център в началото на координатната система: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}$. Областта от стойности е интервалът $(0, +\infty)$.

3) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}}}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Дефиниционната област на тази функция множеството от точки, удовлетворяващо неравенството

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1,$$

т.е. елипсоид: $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} < 1\}$. Областта от стойности е интервалът $[1, +\infty)$.

4) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sin(x^2 + y^2)}$. Дефиниционната област на тази функция множеството от точки, удовлетворяващо

$$\sin(x^2 + y^2) \neq 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \neq k\pi, k = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq k\pi, k=0,1,2,\ldots\}$ - координатната равнина без началото т. $O(0,0)$ и без всички окръжности с център в началото и радиус $\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$. Областта от стойности е $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

24.3. Редици от точки в $\mathbb{R}^n$.

Определение 19. *Казваме, че е дадена* ***безкрайната редица*** $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ *от точки в* $\mathbb{R}^n$ *(записване съкратено* $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ *или* $\{M_n\}$*), ако на всяко естествено число* n *по някакво правило е съпоставена точка* $M_n \in \mathbb{R}^n$.

Определение 20. *Казваме, че редицата* $\{M_n\}$ *от точки в* $\mathbb{R}^n$ ***клони към точката*** $M \in \mathbb{R}^n$ *(или* ***има граница*** M*), ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува такова естествено число* ν_ε*, че за всяко* $n > \nu_\varepsilon$ *е изпълнено* $\rho(M_n, M) < \varepsilon$*. Всяка редица, която има граница, се нарича* ***сходяща***.

С формули се записва по следния начин:
$M_n \xrightarrow{n\to\infty} M$ - чете се M_n *клони към* M *при* $n \to \infty$, или
$\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$ - чете се *границата на* M_n *е равна на* M *при* $n \to \infty$.

Теорема 1. *Редицата* $\{M_k\}_k$ *от точки в* $\mathbb{R}^n$ *клони към точката* $M \in \mathbb{R}^n$ *тогава и само тогава, когато числовите редици* $\left\{x_1^{(k)}\right\}_k, \left\{x_2^{(k)}\right\}_k, \ldots, \left\{x_n^{(k)}\right\}_k$*, състоящи се от координатите на точките* M_k*, клонят съответно към числата* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, които са координатите на точката* M.

Доказателство. 1) Нека $M_k \to M$ и да вземем произволно число $\varepsilon > 0$. Тогава съществува число ν такова, че при $k > \nu$ имаме $\rho(M_k, M) < \varepsilon$, или, записано по друг начин,

$$\sqrt{(x_1^{(k)} - x_1)^2 + (x_2^{(k)} - x_2)^2 + \ldots + (x_n^{(k)} - x_n)^2} < \varepsilon.$$

Оттук следва, че при $k > \nu$ са изпълнени и неравенствата

$$\left|x_1^{(k)} - x_1\right| < \varepsilon, \left|x_2^{(k)} - x_2\right| < \varepsilon, \ldots, \left|x_n^{(k)} - x_n\right| < \varepsilon.$$

Така получихме, че редиците $\left\{x_1^{(k)}\right\}_k, \left\{x_2^{(k)}\right\}_k, \ldots, \left\{x_n^{(k)}\right\}_k$, състоящи се от координатите на точките M_k, клонят съответно към числата $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2) Нека сега редиците $\left\{x_1^{(k)}\right\}_k, \left\{x_2^{(k)}\right\}_k, \ldots, \left\{x_n^{(k)}\right\}_k$, състоящи се от координатите на точките M_k, клонят съответно към числата $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогава за произволно $\varepsilon > 0$ съществуват числа ν_i такива, че при $k > \nu_i$ е изпълнено $\left|x_i^{(k)} - x_i\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нека да положим $\nu = \max(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$. Тогава имаме, че при $k > \nu$ са изпълнени всички неравенства $\left|x_i^{(k)} - x_i\right| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ за $i = 1, 2, \ldots, n$. Следователно при $k > \nu$ ще бъде изпълнено и неравенствтото $\rho(M_k, M) < \varepsilon$, т.е. $M_k \to M$. □

Определение 21. *Казваме, че редицата $\{M_k\}_k$ от точки в $\mathbb{R}^n$ е* ***ограничена,*** *ако съществува число $A > 0$ такова, че $\rho(O, M_k) \le A$ за всяко $k \in \mathbb{N}$, като тук с O е означена точката с нулеви координати.*

Определение 22. *Ако $k_1, k_2, \dots, k_j, \dots$ е произволна строго растяща редица от естествени числа, то ще наричаме редицата от точки*

$$M_{k_1}, M_{k_2}, \dots, M_{k_j}, \dots$$

подредица на редицата $\{M_k\}_k$.

Теорема 2 (Болцано-Вайерщрас). *От всяка ограничена редица $\{M_k\}_k$ от точки в $\mathbb{R}^n$ може да се избере сходяща подредица.*

Доказателство. Тъй като $\{M_k\}_k$ е ограничена редица, то съществува число $A > 0$ такова, чв $\rho(O, M_k) \le A$ за всяко $k \in \mathbb{N}$. От това, че

$$\rho(O, M_k) = \sqrt{(x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(k)})^2 + \ldots + (x_n^{(k)})^2},$$

получаваме неравенствата $\left|x_1^{(k)}\right| \le A, \left|x_2^{(k)}\right| \le A, \dots, \left|x_n^{(k)}\right| \le A$ за всяко $k \in \mathbb{N}$, т.е. числовите редици $\left\{x_1^{(k)}\right\}_k$, $\left\{x_2^{(k)}\right\}_k$, …, $\left\{x_n^{(k)}\right\}_k$ са ограничени.

От теоремата на Болцано-Вайерщрас за числови редици следва, че от ограничената редица $\left\{x_1^{(k)}\right\}_k$ можем да изберем подредица $\left\{x_1^{(k_{j_1})}\right\}_{j_1}$, клоняща към числото x_1.

От редицата от вторите координати на точките M_k разглеждаме подредицата $\left\{x_2^{(k_{j_1})}\right\}_{j_1}$. Тъй като това е ограничена редица отново от теоремата на Болцано-Вайерщрас за числови редици следва, че можем да отделим подредица $\left\{x_2^{(k_{j_2})}\right\}_{j_2}$, клоняща към числото x_2. Така подредиците $\left\{x_1^{(k_{j_2})}\right\}_{j_2}$ и $\left\{x_2^{(k_{j_2})}\right\}_{j_2}$ клонят съответно към числата x_1 и x_2.

От редицата от третите координати на точките M_k разглеждаме подредицата $\left\{x_3^{(k_{j_2})}\right\}_{j_2}$. Тъй като това е ограничена редица отново от теоремата на Болцано-Вайерщрас за числови редици следва, че можем да отделим подредица $\left\{x_3^{(k_{j_3})}\right\}_{j_3}$, клоняща към числото x_3. Така подредиците $\left\{x_1^{(k_{j_3})}\right\}_{j_3}$, $\left\{x_2^{(k_{j_3})}\right\}_{j_3}$ и $\left\{x_3^{(k_{j_3})}\right\}_{j_3}$ клонят съответно към числата x_1, x_2 и x_3.

Продължавайки по същия начин, накрая от редицата от n-тите координати на точките M_k ще получим подредица $\left\{x_n^{(k_{j_n})}\right\}_{j_n}$, клоняща към числото x_n. Така подредиците $\left\{x_1^{(k_{j_n})}\right\}_{j_n}$, $\left\{x_2^{(k_{j_n})}\right\}_{j_n}$, …, $\left\{x_n^{(k_{j_n})}\right\}_{j_n}$ клонят съответно към числата x_1, x_2, …, x_n.

Но тогава от Теорема 1 ще следва, че подредицата $\left\{M_{k_{j_n}}\right\}_{j_n}$ на редицата от точки $\{M_k\}_k$ е сходяща към точката M с координати $x_1, x_2, \dots, x_n$. □

24.4. Граница на функция на две и повече променливи.

Определение 23. *Нека функцията $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е дефинирана в множеството $G \subset \mathbb{R}^n$ и M_0 е точка на сгъстяване за G. Казваме, че числото*

ℓ е граница на функцията $f(M)$ в точката M_0 (или при $M \to M_0$) (записваме $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = \ell$), ако:

1) (Коши) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta_\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $M \in G$, за което $0 < \rho(M, M_0) < \delta_\varepsilon$, е изпълнено $|f(M) - \ell| < \varepsilon$.

2) (Хайне) за всяка редица $\{M_k\}_k$ от точки в $\mathbb{R}^n$ такава, че $M_k \in G \setminus \{M_0\}$ за всяко $k \in \mathbb{N}$ и $M_k \to M_0$ е изпълнено $f(M_k) \to \ell$.

Теорема 3. *Определенията на Коши и Хайне за граница на функция на n променливи са еквивалентни.*

Доказателството е аналогично на случая на функция на една променлива.

24.5. Непрекъснатост на функция на две и повече променливи.

Определение 24. *Нека функцията $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е дефинирана в множеството $G \subset \mathbb{R}^n$ и $M_0 \in G$. Казваме, че $f(M)$ е **непрекъсната в точката** M_0, ако съществува крайната граница $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ и тази граница е равна на стойността на функцията в точката M_0:*

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Функцията $f(M)$ се нарича **непрекъсната в множеството** $G \subset \mathbb{R}^n$, ако тя е непрекъсната във всяка точка M от това множество.

От определенията на Коши и Хайне за граница на функция веднага следва, че можем да използваме следните еквивалентни определения на понятието непрекъснатост:

Определение 25. *Нека функцията $f(M)$ е дефинирана в множеството $G \subset \mathbb{R}^n$ и $M_0 \in G$. Казваме, че $f(M)$ е непрекъсната в точката M_0, ако:*

1) (Коши) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta_\varepsilon > 0$ такова, че за всяко $M \in G$, за което $\rho(M, M_0) < \delta_\varepsilon$, е изпълнено $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

2) (Хайне) за всяка редица $\{M_k\}_k$ от точки в $\mathbb{R}^n$ такава, че $M_k \in G$ за всяко $k \in \mathbb{N}$ и $M_k \to M_0$ е изпълнено $f(M_k) \to f(M_0)$.

Свойство 1. *Нека функциите $f(M)$ и $g(M)$ са дефинирани в множеството $G \subset \mathbb{R}^n$ и са непрекъснати в точката $M_0 \in G$. Тогава:*

1) Функцията $f(M) \pm g(M)$ е непрекъсната в M_0;

2) Функкията $f(M).g(M)$ е непрекъсната в M_0;

3) ако $g(M_0) \neq 0$, то функцията $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ е непрекъсната в M_0.

Тези свойства следват от определението на Хайне за непрекъснатост и свойствата на сходящите редици.

Накратко свойствата 1), 2) и 3) можем да формулираме така: сума, разлика произведение и частно (когато е дефинирано) на непрекъснати функции е непрекъсната функция.

Свойство 2. *Нека функциите $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_s)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_s)$, $\ldots$, $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ са непрекъснати в точката $L_0(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots, t_s^{(0)}) \in \mathbb{R}^s$, а функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е непрекъсната в точката $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, като $x_k^{(0)} = \varphi_k(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \ldots, t_s^{(0)})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогава сложната функция*

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_s) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_s), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_s), \ldots, \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_s))$$

е непрекъсната в точката L_0.

Доказателството се прави по аналогия на случая на функция на една променлива (чрез определението на Хайне).

Теорема 4. *Ако функцията $f(M)$ е непрекъсната в точката M_0 и $f(M_0) > 0$ ($f(M_0) < 0$), то съществува такава δ-околност $U(M_0, \delta)$ на M_0, че $f(M) > 0$ ($f(M) < 0$) за всяко $M \in U(M_0, \delta)$.*

Доказателство. Нека за определеност да считаме, че $f(M_0) > 0$. Тъй като $f(M)$ е непрекъсната в точката M_0, то за $\varepsilon = \dfrac{f(M_0)}{2} > 0$ съществува $\delta > 0$ такова, че за всяко $M \in D_f$, за което $\rho(M, M_0) < \delta$ е изпълнено $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$. Записано по друг начин това означава, че за всяка точка $M \in U(M_0, \delta)$ са изпълнени неравенствата

$$0 < \frac{f(M_0)}{2} = f(M_0) - \varepsilon < f(M) < f(M_0) + \varepsilon = \frac{3f(M_0)}{2}.$$

□

Теорема 5 (Вайерщрас). *Нека функцията $f(M)$ е непрекъсната в затвореното и ограничено множество $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогава:*

1) функцията $f(M)$ е ограничена върху G;

2) функцията $f(M)$ достига върху множеството G своята най-голяма и най-малка стойности.

Доказателството е аналогично на доказателството на теоремата на Вайерщрас за функция на една променлива.