25. Частни производни от първи ред. Диференцируемост на функция на две и повече променливи

25.1. Частни производни от първи ред.

Определение 1. *Нека $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ е вътрешна точка за дефиниционната област на функцията $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Изразът*

$$\frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)} + \Delta x_k, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_k}$$

се нарича ***диференчно частно на*** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ***е точката*** M_0 ***по променливата*** x_k *($\Delta x_k = x_k - x_k^{(0)}$).*

Ако съществува границата на това диференчно частно при $\Delta x_k \to 0$, тя се нарича ***частна производна на функцията*** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ***в точката*** M_0 ***по променливата*** x_k ***и се бележи с*** $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)$ ***или*** $f'_{x_k}(M_0)$, *т.е. по определение*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k}.$$

Да отбележим, че частната производна на функцията $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по променливата x_k представлява обикновена производна на функция на една променлива x_k, тъй като останалите променливи имат фиксирани стойности. Поради тази причина пресмятането на частни производни се извършва по обичайните правила за пресмятане на производна на функция на една променлива.

Да дадем определението за частна производна в случая на функция на две променливи:

Определение 2. *Нека $M_0(x_0, y_0)$ е вътрешна точка за дефиниционната област на функцията $f(x, y)$. Изразът*

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

се нарича ***диференчно частно на*** $f(x, y)$ ***в точката*** M_0 ***по променливата*** x *($\Delta x = x - x_0$).*

Ако съществува границата на това диференчно частно при $\Delta x \to 0$, тя се нарича ***частна производна на функцията*** $f(x,y)$ ***в точката*** M_0 ***по променливата*** x ***и се бележи с*** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)$ ***или*** $f'_x(M_0)$, *т.е. по определение*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Съответно изразът

$$\frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

се нарича ***диференчно частно на*** $f(x,y)$ ***в точката*** M_0 ***по променливата*** y $(\Delta y = y - y_0)$.

Ако съществува границата на това диференчно частно при $\Delta y \to 0$, тя се нарича ***частна производна на функцията*** $f(x,y)$ ***в точката*** M_0 ***по променливата*** y ***и се бележи с*** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)$ ***или*** $f'_y(M_0)$, *т.е. по определение*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

25.2. Диференцируемост на функция на две и повече променливи.

Определение 3. *Нека $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ е вътрешна точка за дефиниционната област на функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пълно нарастване на функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точката M_0 наричаме израза*

$$\Delta f = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Казваме, че функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е ***диференцируема*** *в точката M_0, ако нейното пълно нарастване може да се представи във вида*

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n +$$

$$+ \alpha_1(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \alpha_2(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \ldots + \alpha_n(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n),$$

където $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са константи, а за всяка от функциите $\alpha_k(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$ е изпълнено

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\alpha_k(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)}{\rho} = 0, \rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2}.$$

Изразът $A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n$ се нарича ***диференциал*** *на функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точката $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ и се означава с df, т.е.*

$$df = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n.$$

За симетрия на записа е прието нарастването на независимите променливи Δx_k да се означава с dx_k. Така за диференциала на $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получаваме

$$df = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n.$$

Забележка. От израза, дефиниращ ρ, е ясно, че $\rho \to 0$ тогава и само тогава, когато $\Delta x_k \to 0$ за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1 (Необходимо условие за диференцируемост). *Ако функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е диференцируема в точката $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то в тази точка съществуват частните производни по всички променливи, като при това $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = A_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, където $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са константите от определението за диференцируемост.*

Доказателство. Тъй като функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е диференцируема в точката M_0, за пълното ѝ нарастване имаме, че

$$\Delta f = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \ldots + A_n\Delta x_n +$$

$$+\alpha_1(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \alpha_2(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \ldots + \alpha_n(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n).$$

Замествайки в пълното нарастване $\Delta x_j = 0$ за всяко $j \neq k$ получаваме частното нарастване $\Delta_{x_k} f$:

$$\Delta_{x_k} f = A_k\Delta x_k + \alpha_1(0, \ldots, 0, \Delta x_k, 0, \ldots, 0) +$$

$$+\alpha_2(0, \ldots, 0, \Delta x_k, 0, \ldots, 0) + \ldots + \alpha_n(0, \ldots, 0, \Delta x_k, 0, \ldots, 0).$$

Тогава е изпълнено, че

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \left(\frac{A_k\Delta x_k + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(0, \ldots, 0, \Delta x_k, 0, \ldots, 0)}{\Delta x_k} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \left(A_k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i(0, \ldots, 0, \Delta x_k, 0, \ldots, 0)}{\Delta x_k} \right) = A_k.$$

(това, че $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\alpha_i(0, \ldots, 0, \Delta x_k, 0, \ldots, 0)}{\Delta x_k} = 0$, следва от изискването за функциите α_k в определението за диференцируемост.)

По този начин получихме, че съществува частната производна $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(M_0)$ и тя е равна на константата A_k. □

Забележка. Замествайки константите $A_1, A_2, \ldots, A_n$ със съответно равните им частни производни за диференциала на фунцкията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получаваме

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Теорема 2. *Ако функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е диференцируема в точката $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то тя е непрекъсната в тази точка.*

Доказателство. Знаем, че функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е непрекъсната в точката M_0, ако е изпълнено равенството

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Записано по друг начин това означава, че

$$\lim_{M \to M_0} (f(M) - f(M_0)) = 0$$

или, преминавайки към формули с нараствания на функцията и променливите, достатъчно е да покажем, че

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta f = 0.$$

Тъй като функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е диференцируема в точката M_0, за пълното й нарастване имаме, че

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n +$$

$$+ \alpha_1(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \alpha_2(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) + \ldots + \alpha_n(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n).$$

Имайки в предвид изискванията към функциите α_k в определението за диференцируемост, ясно е, че

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \alpha_k(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) = 0 \text{ за всяко } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогава

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta f = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \left(A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n) \right) = 0.$$

$\square$

Теорема 3 (Достатъчно условие за диференцируемост). *Ако функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ има частни производни по всички променливи в околност на точката $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, като при това всички частни производни са непрекъснати в самата точка M_0, то функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е диференцируема в тази точка.*

Доказателство. За краткост на изложението ще докажем теоремата в случая на функция на две променливи. И така, нека функцията $f(x,y)$ има частни производни $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в околност на точката $M_0(x_0,y_0)$, като в самата точка M_0 частните производни са непрекъснати. Даваме на аргументите достатъчно малки нараствания Δx и Δy такива, че точката $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ да не напуска указаната околност на точката M_0. Пълното нарастване на функцията $f(x,y)$ може да се запише във вида

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0).$$

Изразът $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)$ може да се разглежда като нарастване на функцията на едно променливо $\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y)$ в интервала с краища x_0 и $x_0+\Delta x$. Тъй като функцията $f(x,y)$ има частна производна по променливото x, то разглежданата функция $\varphi(x)$ е диференцируема и $\varphi'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0+\Delta y)$.

Прилагайки теоремата на Лагранж към функцията $\varphi(x)$ в интервала с краища x_0 и $x_0+\Delta x$ получаваме, че съществува число $\theta_1 \in (-1,0)\cup(0,1)$ такова, че

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) =$$

$$= \varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x.$$

Разсъждавайки по същия начин, получаваме и че

$$f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y, \theta_2 \in (-1,0)\cup(0,1).$$

Дефинираме функциите

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

и

$$\beta(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Тъй като частните производни $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ са непрекъснати в точката $M_0(x_0,y_0)$, за тези две функции имаме

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

За пълното нарастване на функцията $f(x,y)$ в точката $M_0(x_0,y_0)$ получаваме

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y.$$

Тъй като

$$0 \le \left|\frac{\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| = \frac{|\alpha(\Delta x,\Delta y)|\,|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \le$$

$$\le \frac{|\alpha(\Delta x,\Delta y)|\,|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2}} = \frac{|\alpha(\Delta x,\Delta y)|\,|\Delta x|}{|\Delta x|} = |\alpha(\Delta x,\Delta y)|$$

и $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha(\Delta x,\Delta y) = 0$, то е изпълнено и че

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Аналогично се получава и че

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\beta(\Delta x, \Delta y)\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

С това показахме, че функцията $f(x, y)$ е диференцируема в точката $M_0(x_0, y_0)$.

За случая на функция на n променливи разсъжденията са аналогични, като пълното нарастване на функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точката $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ се представя във вида

$$\Delta f = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)} + \Delta x_k, x_{k+1}^{(0)} + \Delta x_{k+1}, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) -$$
$$- f(x_1^{(0)}, \ldots, x_{k-1}^{(0)}, x_k^{(0)}, x_{k+1}^{(0)} + \Delta x_{k+1}, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n)].$$

$\square$