# АЛГОРИТЪМ ЗА НАМИРАНЕ НА ЛОКАЛНИ ЕКСТРЕМУМИ НА ФУНКЦИЯ НА ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

**1) Намираме първите частни производни $f'_x$ и $f'_y$.**

**2) Решаваме системата:**

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

*Корените на тази система са <u>критичните точки</u> на функцията ( точки, в които евентуално има локален екстремум. <u>Т.е. точки, в които може да има, но може и да няма локален екстремум</u>)*

**3) Записваме общия вид на** $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$ **за конкретната функция**

*(детерминанта от втори ред , членовете на която са вторите частни производни на разглежданата функция). Тази детерминанта решаваме като от произведението на елементите по главния диагонал се извади произведението на елементите от втория диагонал, т.е.*

$$\Delta(x,y) = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''_{xy} \cdot f''_{yx}$$

**4) За всята от критичните точки** (намерени в първа стъпка на алгоритъма) **пресмятаме $\Delta(x_0, y_0)$:**

– **ако $\Delta(x_0,y_0) > 0$,** в точката с координати $(x_0, y_0)$ <u>има локален екстремум.</u>

– **ако $\Delta(x_0,y_0) < 0$,** в точката с координати $(x_0, y_0)$ <u>няма локален екстремум</u>. Тази точка се нарича седлова точка (точка на минимакс).

– **ако $\Delta(x_0,y_0) = 0$,** в точката с координати $(x_0, y_0)$ <u>може да има, а може и да няма екстремум</u>. Необходими са допълнителни изследвания.

**5) За точките, в които получихме, че има локален екстремум, трябва да проверим дали този екстремум е минимум или съответно максимум, като:**

– **ако $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$,** в точката с координати $(x_0, y_0)$ <u>има локален минимум.</u>

– **ако $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$,** в точката с координати $(x_0, y_0)$ <u>има локален максимум.</u>

**6) Пресмятаме $f_{min}$ и $f_{max}$**

**ПРИМЕРНИ ЗАДАЧИ:**

## 1 зад. Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^2 - 6xy + 2y^3 - 3}$$

Решение: Първите частни производни на функцията са

$f_x' = 2x - 6y$ и $f_y' = -6x + 6y^2$.

Приравняваме ги на нула и получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 6y = 0 \\ -6x + 6y^2 = 0 \end{array} \right.$$

Решението на системата е $x_1 = 0,\ x_2 = 9,\ y_1 = 0,\ y_2 = 3,$

т.е. функцията има две критични точки $A(0\,,0)$ и $B(9\,,3)$ (*точките, в които трябва да проверим дали има или няма екстремум).*

Вторите частни производни на функцията са

$f_{xx}'' = 2, \qquad f_{xy}'' = f_{yx}'' = -6, \qquad f_{yy}'' = 12y$

Тогава $\boldsymbol{\Delta(x,y)} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{f_{xx}''} & \boldsymbol{f_{xy}''} \\ \boldsymbol{f_{yx}''} & \boldsymbol{f_{yy}''} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 12y \end{vmatrix} = 24y - 36.$

За точката $A(0\,,0)$ получаваме $\Delta(0\,,0) = 24.0 - 36 = -36 < 0 \Longrightarrow$ в точка $A(0\,,0)$ няма локален екстремум, тази точка е седлова точка.

За точката $B(9\,,3)$ получаваме $\Delta(9\,,3) = 24.3 - 36 = 72 - 36 = 36 > 0 \Rightarrow$в точка $B(9\,,3)$ има локален екстремум.

Получихме, че функцията има локален екстремум само в точка $B(9\,,3)$. Трябва да проверим дали този екстремум е минимум или максимум:

Понеже $f_{xx}''(9\,,3) = 2 > 0$, то този екстремум е минимум.

$\boldsymbol{f_{min}(9\,,3) = 9^2 - 6.9.3 + 2.3^3 - 3 = 81 - 162 + 54 - 3 = -30.}$

## 2 зад. Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x + 3y}$$

Решение:

Първите частни производни на функцията са

$f_x' = 3x^2 - 3$ и $f_y' = -3y^2 + 3$.

Приравняваме ги на нула и получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 3x^2 - 3 \ = 0 \\ -3y^2 + 3 = 0 \end{array} \right.$$

Решението на системата е $x = \pm 1$ , $y = \pm 1$

т.е. функцията <u>има четири критични точки</u> $A(1\,,1)$ , $B(1\,,-1)$ , $C(-1\,,1)$ и $D(-1\,,-1)$ (*точките, в които трябва да проверим дали има или няма екстремум)*.

Вторите частни производни на функцията са

$f''_{xx} = 6x, \qquad f''_{xy} = f''_{yx} = 0, \qquad f''_{yy} = -6y$

Тогава $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{vmatrix} = -36xy.$

- За точката $A(1\,,1)$ получаваме $\Delta(1\,,1) = \ -36.1.1 = -36 < 0 \Rightarrow$ в точка $A(1\,,1)$ няма локален екстремум, тази точка е седлова точка.
- За точката $B(1\,,-1)$ получаваме $\Delta(1\,,-1) = -36.1.(-1) = 36 > 0 \Rightarrow$ в точка $B(1\,,-1)$ има локален екстремум.
- За точката $C(-1\,,1)$ получаваме $\Delta(-1\,,1) = -36.(-1).1 = 36 > 0 \Rightarrow$ в точка $C(-1\,,1)$ има локален екстремум.
- За точката $D(-1\,,-1)$ получаваме $\Delta(-1\,,-1) = -36.(-1).(-1) = -36 < 0 \Rightarrow$ в точка $D(-1\,,-\,1)$ няма локален екстремум, тази точка е седлова точка.

Получихме, че функцията има локален екстремум в двете точки $B(1\,,-1)$ и $C(-1\,,1)$. Трябва да проверим дали тези екстремуми са минимум или максимум:

Понеже $f''_{xx} = 6x$:

За точката $B(1\,,-1)$ получаваме $f''_{xx}(1\,,-1) = 6.1 = 6 > 0 \Rightarrow$ в точка $B(1\,,-1)$ има минимум.

А за точката $C(-1\,,1)$ получаваме $f''_{xx}(-1\,,1) = 6.(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ в точка $C(-1\,,1)$ има максимум.

$\boldsymbol{f_{min}(1\,,-1) = 1^3 - (-1)^3 - 3.1 + 3.(-1) = 1 + 1 - 3 - 3 = -4}$

$\boldsymbol{f_{max}(-1\,,1) = (-1)^3 - 1^3 - 3.(-1) + 3.1 = -1 - 1 + 3 + 3 = 4}$.

## <u>3 зад</u>. Да се изследва за локални екстремуми функцията

## $\boldsymbol{f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20}$

Решение:

Първите частни производни на функцията са

$f'_x = 3x^2 - 6y - 39$ и $f'_y = 2y - 6x + 18.$

Приравняваме ги на нула и получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 3x^2 - 6y - 39 = 0 \\ 2y - 6x + 18 = 0 \end{array} \right.$$

Решението на системата е $x_1 = 5,\ y_1 = 6$ и $x_2 = 1\ , y_2 = -6$

т.е. функцията имa две критични точки $A(5\ ,6)$ и $B(1\ ,-6)$ (*точките, в които трябва да проверим дали има или няма екстремум)*.

Вторите частни производни на функцията са

$f''_{xx} = 6x, \qquad f''_{xy} = f''_{yx} = -6, \qquad f''_{yy} = 2$

Тогава $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 36.$

- За точката $A(5\ ,6)$ получаваме $\Delta(5\ ,6) = 12.5 - 36 = 24 > 0 \Rightarrow$ в точка $\mathrm{A}(5\ ,6)$ има локален екстремум.
- За точката $B(1\ ,-6)$ получаваме $\Delta(1\ ,-6) = 12.1 - 36 = -24 < 0 \Rightarrow$ в точка $B(1\ ,-\ 6)$ няма локален екстремум, тази точка е седлова точка.

Получихме, че функцията има локален екстремум само в точка $A(5\ ,6)$. Трябва да проверим дали този екстремум е минимум или максимум:

Понеже $f''_{xx} = 6x \Rightarrow f''_{xx}(5\ ,6) = 6.5 = 30 > 0 \Rightarrow$ в точка $A(5\ ,6)$ има минимум.

$\boldsymbol{f_{min}(5\ ,6) = 5^3 + 6^2 - 6.5.6 - 39.5 + 18.6 + 20 = -86}$

## **<u>4 зад</u>. Да се изследва за локални екстремуми функцията**

## $\boldsymbol{f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y - 8}$

Решение:

Първите частни производни на функцията са

$f'_x = 3x^2 - 6x$ и $f'_y = -3y^2 + 3.$

Приравняваме ги на нула и получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} 3x^2 - 6x = 0 \\ -3y^2 + 3 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 3x(x-2) = 0 \\ 3y^2 = 3 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 0, x_2 = 2 \\ y = \pm 1 \end{array} \right.$$

Получихме, че решението на системата е $x_1 = 0, x_2 = 2$ , $y = \pm 1$

т.е. функцията <u>има четири критични точки</u> $A(0\,,1)$ , $B(0\,,-1)$ , $C(2\,,1)$ и $D(2\,,-1)$ (*точките, в които трябва да проверим дали има или няма екстремум)*.

Вторите частни производни на функцията са

$f''_{xx} = 6x - 6,\qquad f''_{xy} = f''_{yx} = 0,\qquad f''_{yy} = -6y$

Тогава $\Delta(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & -6y \end{vmatrix} = -36(xy - y).$

- За точката $A(0\,,1)$ получаваме $\Delta(0\,,1) = -36.(-1) = 36 > 0 \Rightarrow$ в точка $\mathrm{A}(0\,,1)$ има локален екстремум.
- За точката $B(0\,,-1)$ получаваме $\Delta(0\,,-1) = -36.1 = -36 < 0 \Rightarrow$ в точка $B(0\,,1)$ няма локален екстремум. Точката е седлова.
- За точката $C(2\,,1)$ получаваме $\Delta(2\,,1) = -36.1 = -36 < 0 \Rightarrow$ в точка $C(2\,,1)$ няма локален екстремум. Точката е седлова.
- За точката $D(2\,,-1)$ получаваме $\Delta(2\,,-1) = -36.(-1) = 36 > 0 \Rightarrow$ в точка $D(2\,,-1)$ има локален екстремум.

Получихме, че функцията има локален екстремум в двете точки $A(0\,,1)$ и $D(2\,,-1)$. Трябва да проверим дали тези екстремуми са минимум или максимум:

Понеже $f''_{xx} = 6x - 6$:

За точката $A(0\,,1)$ получаваме $f''_{xx}(0\,,1) = 6.0 - 6 = -6 < 0 \Rightarrow$ в точка $A(0\,,1)$ има максимум.

А за точката $D(2\,,-1)$ получаваме $f''_{xx}(2\,,-1) = 6.2 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow$ в точка $D(2\,,-1)$ има минимум.

$\boldsymbol{f_{max}(0\,,1) = 0^3 - 1^3 - 3.0^2 + 3.1 - 8 = -6}$

$\boldsymbol{f_{min}(2\,,-1) = 2^3 - (-1)^3 - 3.2^2 + 3.(-1) - 8 = -14.}$

## ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА:

**Да се изследват за локални екстремуми функциите:**

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
2) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
3) $f(x,y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$
4) $f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x + 3y$
5) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$
6) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 - 216x$
7) $f(x,y) = x^2y + 4xy + y^2 + 2$
8) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 32\ \ln(xy)$
9) $f(x,y) = \ln(3x^2 + 3y^2 + 2)$
10) $f(x,y) = e^{2x}.(x + y^2 + 2y)$
11) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$

## ОТГОВОРИ:

1) $f_{min}(1\,,1) = -1$

2) $f_{min}(0\,,0) = 0\,,\ f_{max}\left(-\frac{5}{3}\,,0\right) = \frac{125}{27}$

3) $f_{max}(4\,,-2) = 13$

4) $f_{min}(1\,,-1) = -4\ \ ,\ f_{max}(-1\,,1) = 4$

5) $f_{min}(1\,,4) = -21$

6) $f_{min}(6\,,0) = -864\ \ ,\ f_{max}(-6\,,0) = 864$

7) $f_{min}(-2\,,2) = -2$

8) $f_{min} = f(4\,,4) = f(-4\,,-4) = 32(1 - \ln 16) = 32(1 - \ln 2^4) = 32(1 - 4\ln 2)$

9) $f_{min}(0\,,0) = \ln 2$

10) $f_{min}\left(\frac{1}{2}\,,-1\right) = -\frac{e}{2}$

11) $f_{min} = f(1\,,1) = f(-1\,,-1) = -2$