ИЗСЛЕДВАНЕ СХОДИМОСТТА НА ЧИСЛОВИ РЕДОВЕ С ПОЛОЖИТЕЛНИ ЕЛЕМЕНТИ ЧРЕЗ КРИТЕРИИ ЗА СХОДИМОСТ

1. ГРАНИЧНА ФОРМА НА ПРИЗНАКА ЗА СРАВНЕНИЕ:

Ако за $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е изпълнено, че това са редове с неотрицателни елементи $(a_n \geq 0\, , b_n \geq 0, \forall n)$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ е l, тогава:

А) $0 \leq l < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

Б) $0 \leq l < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е разходящ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

С други думи, ако членовете на редовете a_n и b_n са реални положителни числа и $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$,то редовете $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,или и двата са сходящи,или и двата са разходящи. Граничният признак за сравнение се прилага най- често за редове, чиито общи членове са рационални и ирационални изрази за n.

Пример 1: Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n}$.

Решение:

$$a_n = \frac{3n^2-2}{n^4+5n} = \frac{n^2\left(3-\frac{2}{n^2}\right)}{n^4\left(1+\frac{5}{n^3}\right)} = \frac{1.\left(3-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{5}{n^3}\right)}$$

Тъй като редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сходящ и тъй като $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n} : \frac{1}{n^2} = 3 \neq 0$,то даденият ред също е сходящ.

Пример 2 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^3+n-1}$.

Решение:

$$a_n = \frac{n+1}{3n^3+n-1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(3+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1.\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}$$

Тъй като редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сходящ и тъй като $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n^3+n-1} : \frac{1}{n^2} = \frac{1}{3} \neq 0$,то даденият ред също е сходящ.

Пример 3 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$.

Решение:

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1.\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

Тъй като редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ и тъй като $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} : \frac{1}{n} = 1 \neq 0$,то даденият ред също е разходящ.

Пример 4 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+4}$.

Решение:

$$a_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{n+4} = \frac{\sqrt{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \frac{n^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(2+\frac{1}{n}\right)}}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \frac{1.\sqrt{\left(2+\frac{1}{n}\right)}}{n^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4}{n}\right)}$$

Тъй като редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ е разходящ и тъй като $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n+4} : \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{2} \neq 0$,то даденият ред също е разходящ.

Пример 5 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}$.

Решение:

$$a_n = \frac{2n+5}{3n^2-2n} = \frac{n\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \frac{1.\left(2+\frac{5}{n}\right)}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}$$

Тъй като редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ е разходящ и тъй като $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n} : \frac{1}{n} = \frac{2}{3} \neq 0$,то даденият ред също е разходящ.

2. КРИТЕРИЙ НА КОШИ:

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е ред с положителни членове $(a_n > 0)$ и нека съществува границата $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогава ако $\ell < 1$, то редът е сходящ и ако $\ell > 1$, то редът е разходящ. Ако $\ell = 1$, критерият на Коши не дава отговор за сходимостта на реда.

Пример 1 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}\right)^{n}$.

Решение:

$a_n=\left(\frac{3n+1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=3>1 \Rightarrow$ редът е разходящ.

Пример 2 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.3^{-n}$.

Решение:

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.3^{-n}. \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{n^2}.3^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.3^{-1}\right]=\frac{e}{3}<1 \Rightarrow$ редът е сходящ.

Пример 3 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+2}\right)^{n}$.

Решение:

$a_n=\left(\frac{2n}{n+2}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{n+2}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+2}=2>1 \Rightarrow$ редът е разходящ.

3. КРИТЕРИЙ НА ДАЛАМБЕР:

Нека $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е ред с положителни членове $(a_n>0)$ и нека съществува границата

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$. Тогава ако $\ell<1$, то редът е сходящ и ако $\ell>1$, то редът е разходящ. Ако $\ell=1$, критерият на Даламбер не дава отговор за сходимостта на реда.

Пример 1 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{3^n.n!}$.

Решение:

$a_n=\frac{(2n+1)!!}{3^n.n!};\ a_{n+1}=\frac{(2n+3)!!}{3^{n+1}.(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+3)!!}{3^{n+1}.(n+1)!}:\frac{(2n+1)!!}{3^n.n!}\right]=$

$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+3)!!}{3^n.3.(n+1)!}.\frac{3^n.n!}{(2n+1)!!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+1)!!.(2n+3)}{3^n.3.n!.(n+1)}.\frac{3^n.n!}{(2n+1)!!}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+3)}{3(n+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+3}=\frac{2}{3}<1 \Rightarrow$

Редът е сходящ.

Пример 2 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n.n!}$.

Решение:

$a_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n.n!}$; $a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}.(n+1)!}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}.(n+1)!}:\frac{(2n-1)!!}{2^n.n!}\right] =$
$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+1)!!}{2^n.2.(n+1)!}\cdot\frac{2^n.n!}{(2n-1)!!}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n-1)!!.(2n+1)}{2^n.2.n!.(n+1)}\cdot\frac{2^n.n!}{(2n-1)!!}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+1)}{2(n+1)}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+2} = 1 \Rightarrow$ Критерият на Даламбер не дава отговор за сходимостта на реда.

Пример 2 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$.

Решение:

$a_n = \frac{2^n}{n^2}$; $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{2^n}{n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^n.2}{(n+1)^2}.\frac{n^2}{2^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{(n+1)^2} =$
$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+2n+1} = 2 > 1 \Rightarrow$ Редът е разходящ.

Пример 3 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{2^n}$.

Решение:

$a_n = \frac{n^8}{2^n}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)^8}{2^{n+1}}$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^8}{2^{n+1}}:\frac{n^8}{2^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^8}{2^n.2}.\frac{2^n}{n^8}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^8}{2.n^8} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$
Редът е сходящ.

3. КРИТЕРИЙ НА ДЮАМЕЛ:

Нека $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е ред с положителни членове $(a_n > 0)$ и нека съществува границата $\lim_{n\to\infty}n.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = l$. Тогава ако $\ell > 1$, то редът е сходящ и ако $\ell < 1$, то редът е разходящ.
Ако $\ell = 1$, критерият на Даламбер не дава отговор за сходимостта на реда.

Пример 1 : Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n.n!}$.

Решение:

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n.n!};\ a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}.(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left[\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n.n!} : \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}.(n+1)!}\right)-1\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} n.\left[\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n.n!}.\frac{2^n.2.(n+1)!}{(2n+1)!!}\right)-1\right] = \lim_{n\to\infty} n.\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n.n!}.\frac{2^n.2.n!.(n+1)}{(2n-1)!!.(2n+1)}-1\right] = \lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{2(n+1)}{2n+1}-1\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n.\frac{2n+2-2n-1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} n.\frac{1}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Редът е разходящ.

<u>Пример 2 :</u> Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$.

Решение:

$$a_n = \frac{2}{3+n^2};\ a_{n+1} = \frac{2}{3+(n+1)^2} = \frac{2}{3+n^2+2n+1} = \frac{2}{n^2+2n+4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{2}{3+n^2} : \frac{2}{n^2+2n+4}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{2}{3+n^2}.\frac{n^2+2n+4}{2}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{n^2+2n+4}{3+n^2}-1\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n.\frac{n^2+2n+4-3-n^2}{3+n^2} = \lim_{n\to\infty} n.\frac{2n+1}{3+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{3+n^2} = 2$$

$2 > 1 \Rightarrow$ редът е сходящ.

<u>Пример 3 :</u> Изследвайте за сходимост реда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

Решение:

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!};\ a_{n+1} = \frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} : \frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}-1\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.\frac{(2n+3)!!}{(2n+2)!!}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.\frac{(2n+1)!!.(2n+3)}{(2n)!!.(2n+2)}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{2n+3}{2n+2}-1\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n.\left(\frac{2n+3-2n-2}{2n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} n.\frac{1}{2n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Редът е разходящ.

Изследвайте самостоятелно за сходимост следните редове:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^3-1}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4n^3+5n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n.5^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+2}\right)^n$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n.(2n+1)!}{2n+3}$; 9) $\sum_{n=1}^{n}\frac{(\sqrt{n})^n}{n!}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2^{n+1}-1)}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n!}$

отговори: 1) сходящ; 2) разходящ; 3) сходящ; 4) сходящ; 5) разходящ; 6) сходящ; 7) разходящ; 8) разходящ; 9) сходящ; 10) сходящ; 11) разходящ; 12) сходящ.